領域とその定義関数のFourier-Laplace変換の零点集合について

東大 理 小林俊行 (Toshiyuki Kobayashi)

R^nの有界集合Ωの定義関数のFourier変換$\widehat{\chi_\Omega}(\zeta)=\int_\Omega e^{i\langle x,\zeta\rangle}dx$は、$\zeta$の整関数となるが、その零点集合$\mathcal{N}(\Omega)$に着目する。例えば、$\Omega$が球の時、$\mathcal{N}(\Omega)$は、可算無限個の同心球面になり、$\Omega$が立方体の時は、$\mathcal{N}(\Omega)$は格子状になる.

素朴な疑問として次の問題が考えられる.

- $\Omega \longmapsto \mathcal{N}(\Omega)$の対応は1対1か？

  (即ち、零点は領域を決定するか？)
- $\mathcal{N}(\Omega)$はΩの幾何的な量をどの様に反映しているか？
- $\widehat{\chi_\Omega}(\zeta)$と格子点問題や偏微分方程式の問題との関連

この論説では、§1, §2でR^n及びRiemann対称空間$SO_0(n,1)/SO(n)$の場合、Ωがstrictly convexの時の$\mathcal{N}(\Omega)$の形を調べ、特に、$\mathcal{N}(\Omega)$の漸近形から、Ωを決定する支持関数に関する微分方程式が得られる事を見る。この結果から、特にR^2の強凸集合は零点によって決定される事が導かれる。

また、$\mathcal{N}(\Omega)$が球面を含む場合Ωは球か？（逆は正しい）という問題は、過剰決定問題やtomography等、色々な問題と関連していて特に興味深い。この問題はPompeiuの問題と言われ、同値な問題が約60年前に提起されたが、$\mathbb{R}^2$の凸領域に限っても、現在まだ未解決である。

§3では、Ω＝球に摂動を与えた時に、球関数を用いてPompeiuの問題を論じる。

§1 $\mathbb{R}^n$の凸集合と、Fourier変換の零点集合

この節では、$\mathbb{R}^n$の凸集合Ωに対し、零点集合$\mathcal{N}(\Omega)$の漸近的な形状を調べ、$\mathcal{N}(\Omega)$がΩを決定するか？という問題を扱う。

Ωを$\mathbb{R}^n$の有界集合、χ_Ωをその定義関数とする。

χ_ΩのFourier変換を
$$\widehat{\chi_\Omega}(\zeta) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\Omega(x)\, e^{i\langle x, \zeta\rangle}\, dx = \int_\Omega e^{i\sum_{j=1}^n x_j \zeta_j}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$
と定義する。$\widehat{\chi_\Omega}(\zeta)$は、$\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$の整関数である。

$\widehat{\chi_\Omega}$の零点集合を、
$$\mathcal{N}(\Omega) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \widehat{\chi_\Omega}(\zeta) = 0\}$$
$$\mathcal{N}(\Omega)_{\mathbb{R}} := \mathcal{N}(\Omega) \cap \mathbb{R}^n$$
とおく。

Ωが点対称の時、$\widehat{\chi_\Omega}(\zeta)$は$\zeta \in \mathbb{R}^n$上real valuedであるから、$\mathbb{R}^n$における零点集合$\mathcal{N}(\Omega)_{\mathbb{R}}$は、一般に$\mathbb{R}^n$の余次元1のanalytic setとなる。一方$\Omega$も$\mathbb{R}^n$の余次元1の集合である$\partial\Omega$によって決定

されるから、次元の観点から、Ωが点対称の時の"$\Omega \mapsto \mathcal{N}(\Omega)_{\mathbb{R}}$"の対応は'適切'なものと考えられる。しかし、$\Omega$が点対称でない時、一般に$\zeta \in \mathbb{R}^n$だけで零点を考える事は不十分である。（実際、Cor 2 - ii)が成り立つ。）そこで、Ωが点対称の場合に$\mathcal{N}(\Omega)_{\mathbb{R}}$を考えた拡張として、一般の$\Omega$の場合には、実方向の complex lines

$$
\begin{array}{ccc}
S^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{C} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
(\omega, \zeta) & \longmapsto & \zeta \cdot \omega = (\zeta \omega_1, \cdots, \zeta \omega_n)
\end{array}
$$

で$\mathcal{N}(\Omega)$を切って調べる事にする。

<u>定義</u>　$\mathbb{R}^n$の有界領域Ωが <u>strictly convex</u> であるとは、

$\partial\Omega \underset{\text{連結}, C^\infty}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^n$に対するGauß曲率$K : \partial\Omega \to \mathbb{R}$が、任意の点で正の値をとる時をいう。

この時、Gauß map $e : \partial\Omega \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$ は C^∞-diffeo

Ωの支持関数 $h : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ を $h(\omega) := (\omega, e^{-1}(\omega)) = \sup_{x \in \Omega} (x, \omega)$ で定義する。支持関数hから、凸領域Ωは容易に再現される。

$d : S^{n-1} \to \mathbb{R}$　C^∞ map　を次の式で定義する。

$$d(\omega) := \frac{\log K \circ e(-\omega) - \log K \circ e(\omega)}{2\,(h(\omega) + h(-\omega))}$$

この時、$\mathcal{N}(\Omega)$を$S^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{C}$で切った切り口の漸近形が、年輪状になるという事を精密に述べたのが次の定理である。

<u>定理1</u>　Ωを$\mathbb{R}^n$のstrictly convex domain とする.

$d := \max_{\omega\in S^{n-1}} |d(\omega)|$

${}^{\exists} m_0 \in \mathbb{N}$

$W := \left\{ (\omega, \xi + i\eta) : |\eta| < d+1,\ |\xi| > \dfrac{\pi(2m_0 + \frac{n-2}{2})}{\kappa(\omega)+\kappa(-\omega)},\ \omega\in S^{n-1} \right\} /_{\sim \mathbb{Z}_2} \underset{\text{open}}{\subset} S^{n-1} \underset{\mathbb{Z}_2}{\times} \mathbb{C}$

この時,　$\mathcal{N}(\Omega) \cap W = \coprod_{m \geq m_0}^{\infty} \mathcal{N}_m$

ここで、各$m \geq m_0$に対し、$\mathcal{N}_m \subset S^{n-1} \times U$は、$S^{n-1}$と

C^{ω}-diffeo な regular submanifold である。

$\mathcal{N}_m^0 \underset{\text{def}}{:=} \left\{ (\omega, \dfrac{\pi(2m + \frac{n-1}{2})}{\kappa(\omega)+\kappa(-\omega)} + i d(\omega)) : \omega \in S^{n-1} \right\} /_{\mathbb{Z}_2} \subset S^{n-1} \underset{\mathbb{Z}_2}{\times} U$　とおくと.

$\mathcal{N}_m$は$\mathcal{N}_m^0$に$S^{n-1} \underset{\mathbb{Z}_2}{\times} \mathbb{C}$の距離(正確には、そのcompact subset全体に入れる通常のmax−min metric)で$m^{-\frac{1}{2}}$のorderで近づく($m \to \infty$)。

この定理から、$\mathcal{N}(\Omega)$が与えられた時、その漸近形から、$d(\omega)$と$\kappa(\omega)+\kappa(-\omega)$、従って${}^{K\circ e(\omega)}/_{K\circ e(-\omega)}$と$\kappa(\omega)+\kappa(-\omega)$が読みとられる。よって、『零点から凸領域が決定されるか?』 ── Ⓐ　という問題は、『直径と'antipodal'な点のGauß曲率の比が決まった時、strictly convex domainはuniqueに決まるか?』 ── Ⓑという微分幾何の問題に帰着される。$n \geq 3$では、筆者はⒷの解答を得ていないが、$n=2$の時は正しい事が証明できる。

Cor 1 $\mathbb{R}^2$ の strictly convex domain は Fourier 変換の零点集合によって決定される。

更に、定理 1 から、$\mathcal{N}(\Omega)$ の漸近形と Ω の幾何的な関係が得られる。即ち、

Cor 2. Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界な strictly convex domain とする。この時、

i) Ω が点対称 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{N}(\Omega)_{\mathbb{R}}$ が無限個の境界のない hypersurface を含む。

ii) Ω が 球 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{N}(\Omega)_{\mathbb{R}}$ が無限個の hypersphere を無限個含む。

iii) $\partial\Omega$ が定幅曲面 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{N}(\Omega) \cap (S^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{C}) \xrightarrow[pr_1]{} \mathbb{R}^n$ の像が無限個の hypersphere を含む。

但し $pr_1 : S^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{C} \ni (w, \xi + i\eta) \mapsto (\xi w_1, \cdots, \xi w_n) \in \mathbb{R}^n$

注意 (1.1) 定理 1 で、$S^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} \{\xi + i\eta \in \mathbb{C} : |\eta| : \text{有界}, |\xi| \text{十分大}\}$ の領域を用いたが、逆に $S^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} \{\xi + i\eta : |\eta| : \text{十分大}, |\xi| \text{有界}\}$ の領域と $\mathcal{N}(\Omega)$ の交わりは空集合となる。尚、いずれの評価も $|\xi| \sim \log|\eta|$ が境目となる。

(1.2) Cor 2 − ii) は、($\mathbb{R}^2$ で) Ω が一般に単連結領域の時に Berenstein が得た結果の特別な場合である。([Be])
(我々は、強凸を仮定している。)

(1.3) 定理 1 の後に述べた問題Ⓑについて:

D^2をS^{n-1}上のhessianとする。この時、$n(\Omega)$から読みとられる関数$A, B \in C^\infty(S^{n-1})$を用いて、支持関数$h$に関する$S^{n-1}$上の次の形の微分方程式が表される：(問、⑥がYes. $\Longleftrightarrow$ ①がE₁(§3)を除いて解が一意)

$$\det(D^2 h + h) = A \det(D^2(B-h) + B - h) \quad \text{—— ①}$$

①はMonge-Ampèreを組み合わせた非線型楕円型の偏微分方程式である($n \geq 3$)　(cf. [Sa])

(1.4) Ωに全く条件をつけない時、$\Omega \mapsto n(\Omega)$の対応は単射ではない。実際、$\mathbb{R}^1 \supset \Omega := \coprod_{j=1}^{4} (a_j, b_j)$の形で、$\Omega \neq \Omega'$ & $n(\Omega) = n(\Omega')$の例を作る事ができる。

従って、この直積によって$\mathbb{R}^n$における反例を得られる。

(1.5) Ωが一般の有界領域($\partial\Omega$は滑らか)の時、$\hat{\chi}_\Omega$は'十分'多くの零点を持つ事が、定理1と同様の方法で示される。

(1.6) 我々は、$n(\Omega)$の無限遠での漸近形から、Ωに関する情報を読みとったが、一方$n(\Omega)$の有界な部分から、Ωに関する情報を得る事は、難しい問題であると思われる(cf. §3)。

この節の最後に、凸領域Ωの境界$\partial\Omega$が'角'を持ったり、flatな部分を持つ場合を考えよう。この場合、零点(の適当な断面)が年輪状になるという定理1は成り立たない。(例、Ωが正方形$\Rightarrow n(\Omega)$は格子状)

る。(但し、flat な点や $C^{n+\varepsilon}(n\geq 1)$ 級の特異点は無制限に~~許す~~が、C^1 級の特異点(角)は高々2個とする。)

$\theta\in[0,2\pi]$ に対し、θ 方向の半直線上にある零点集合 $n(\Omega)_\theta$ を、$n(\Omega)_\theta := \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in n(\Omega)_{\mathbb{R}} : r>0\}$ で定義する。

<u>Prop 1.</u> $n(\Omega)_\theta$ は、可算無限の点列 $\{r_j(\theta)(\cos\theta,\sin\theta) : j=1,2,\cdots\}$ から成る。

Dirichlet 級数 $f(\theta,t) := \sum_{j=1}^{\infty} e^{-r_j(\theta)t}$ $(t>0)$ とおく。

この時、$f(\theta,t)$ は $t\downarrow 0$ で次の漸近展開をもつ。

$$f(\theta,t)\sim \frac{1}{t}\left(A(\theta)+B(\theta)t+\cdots\right)$$

$A(\theta), B(\theta)$ は、Ω と次の様な関係がある。

1) Ω の支持関数 $h(\theta) = \pi A(\theta)$

更に、$B_0(\theta) := B(\theta)-[B(\theta)]$ (Bの小数部分)とおくと、

2) a) Ω は strictly convex $\iff B_0(\theta)\equiv \frac{1}{4}$ $({}^\forall\theta)$

b) $\partial\Omega$ は線分を含む $\iff B_0(\theta)=\frac{1}{2}$ $({}^\exists\theta)$

c) $\partial\Omega$ は角を持つ $\iff B_0(\theta)=\frac{3}{4}$ $({}^\exists\theta)$

尚、$\frac{1}{3}\leqq B_0(\theta)<\frac{1}{2}$ の時、θ に対応する点で、$\partial\Omega$ は $\frac{2B_0}{1-2B_0}$ $(\geqq 2)$ 次の order で、接線に接する。

注意(1.7) b) の θ は孤立点、c) の θ はある open set で成り立つ。

§2 $\mathbb{H}^n(\mathbb{R}) = SO_0(n,1)/SO(n)$ の場合

この節では、§1の結果を、負の定曲率空間 $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$ における'凸集合'の場合に拡張する。

一般に、G を連結実半単純 Lie 群

$A: G \to \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} := Lie(A_{\mathfrak{p}})$ を $G = NA_{\mathfrak{p}}K$ に対応した岩沢 projection,

$\rho \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*$ を $\mathfrak{n} := Lie(N)$ に対応する root の和の半分.

$M := Z_K(A_{\mathfrak{p}})$, dx を $X = G/K$ の G-不変測度とする。

Riemann 対称空間 $X = G/K$ の Fourier 変換を、

$$C_0^\infty(X) \ni F \longmapsto \tilde{F} \in C^\infty(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\mathbb{C}}^* \times K/M)$$

$$\tilde{F}(\lambda, b) := \int_X F(x)\, e^{\langle i\lambda+\rho,\, A(b^{-1}x)\rangle} dx$$ で定義する。

以下、$G = SO_0(n,1) \equiv SO(n,1)$ の e を含む連結成分とする。
岩沢分解 $G = NA_{\mathfrak{p}}K$ を固定する。

$\alpha \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*$ を $\mathfrak{n}$ に対応する unique な positive root, $\rho = \frac{n-1}{2}\alpha$

$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\mathbb{C}}^* \ni \lambda\alpha \longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{C}$ により、$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\mathbb{C}}^*$ と $\mathbb{C}$ を同一視する。

$A_{\mathfrak{p}}^+ := \{\exp H : H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}},\ \alpha(H) > 0\}$

$X \equiv \mathbb{H}^n(\mathbb{R}) := G/K \ni o := eK$ には、断面曲率 $-k^2\ (k>0)$ を与える Riemann 計量を入れる。

$a_0 \in A_{\mathfrak{p}}^+$ を $a_0^t := \exp(t \log a) \in A_{\mathfrak{p}}$ $(t \in \mathbb{R})$ の X での orbit が長さ t で parametrize された測地線となる unique な元とする。

X の N-orbit $g_1 N g_2^{-1}\cdot o$ ($g_1, g_2 \in G$ fix) を horosphere と呼ぶ。
この時、次の事実が成り立つ。(1), 2)は良く知られている。3)は簡単な計算)

Fact 1. 1) horosphere の全体は、$K/M \times A_p$ で parametrize される。

対応は (k mod M, a) $\longleftrightarrow$ $k a N \cdot o$

2) 各 horosphere は、X の超球面の半径 $\uparrow \infty$ の極限として得られる。特に、X からの induced metric で $\mathbb{R}^{n-1}$ (standard) と等長

3) 各 horosphere の、X の余次元 1 の submanifold としての主曲率（第II基本形式の固有値）は、各点で $\underbrace{k, \cdots, k}_{n-1\text{個}}$

定義　X の有界領域 Ω が strictly convex であるとは、
境界 $\partial\Omega$ が連結な C^∞ submanifold で、$\partial\Omega \hookrightarrow X$ から決まる各点の任意の主曲率 $> k$ を満たす時をいう。

例　X の測地的球は、上の意味で strictly convex

注意(2.1)　Fact 1-3) より、strictly convex domain は、horosphere の包絡面に囲まれる領域となる。従って Fact 1-2) の立場では、$\mathbb{R}^n$ における convex の概念の拡張になっている。一方、$\mathbb{R}^n$ と違い、測地的凸より真に強い概念である。

X の strictly convex domain Ω に対し、
支持関数 $C_i : K/M \ni b \bmod M \longmapsto C_i(b) \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) を、

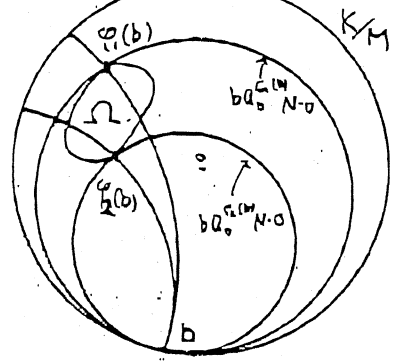
$$\begin{cases} C_1(b) < C_2(b) & b \in K/M \\ \exists n_i = n_i(b) \in N \ \text{st} \ b a_0^{C_i(b)} N\cdot 0 \text{ が } b a_0^{C_i(b)} n_i \cdot 0 \text{ で } \partial\Omega \text{ に接する.} \end{cases}$$

という条件で特徴づけられる関数とする。

Ω が strictly convex という仮定から、$n_i(b)$ は unique に定まり、

C_i は well-defined な C^∞-関数となる。

($i=1,2$ は'内接','外接'に対応する。)



更に、

$$\varphi_i : K/M \xrightarrow{\ \sim\ } \partial\Omega$$
$$b \bmod M \longmapsto b a_0^{C_i(b)} n_i(b)\cdot 0$$

とおくと、φ_i $(i=1,2)$ は C^∞-diffeo となる。

φ_1^{-1} (φ_2^{-1}) は、$\partial\Omega \hookrightarrow X$ の inner (outer) normal vector に沿った測地線の boundary K/M への極限に他ならない。$\mathbb{R}^n$ の hypersurface の Gauß map に相当すると考えられる。

次に、$\partial\Omega \hookrightarrow X$ の主曲率を $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ とする ($^\forall \lambda_j > k$)。

λ_i の対称式は $\partial\Omega$ 上の C^∞ 関数として well-defined である事に注意すると、φ_i による K/M と $\partial\Omega$ の同一視を用いて、

$$K_i : K/M \ni b \bmod M \xrightarrow{C^\infty} K_i(b) \in \mathbb{R}_+ \quad (i=1,2)$$

$$\begin{cases} K_1(b) := \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - k)\circ \varphi_1(b) \\ K_2(b) := \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_j + k)\circ \varphi_2(b) \end{cases}$$

が定義される。

$$d : K/M \ni b \bmod M \longmapsto \frac{\log K_1(b) - \log K_2(b)}{2(C_2(b) - C_1(b))} \in \mathbb{R}$$ とおく

d は negative valued の C^∞ 関数である。

定理 2. $X = \mathbb{H}^n(\mathbb{R})$ の strictly convex domain Ω の特性関数を χ_Ω とする。$\hat{\chi}_\Omega(\zeta, b)$ の零点集合を $\mathcal{N}(\Omega) \subset \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M \simeq \mathbb{C} \times K/M$ とおく。

$$d := \max_{b \in K/M} |d(b)|$$

$$\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{C} \times K/M \underset{\text{open}}{\supset} W \underset{\text{def}}{:=} \left\{ (\zeta, b) \in \mathbb{C} \times K/M : |\operatorname{Im} \zeta| < \frac{d}{R} + \frac{n}{2},\ |\operatorname{Re} \zeta| > \frac{\pi\left(2m_0 + \frac{n-2}{2}\right)}{R(C_2(b) - C_1(b))},\ b \in K/M \right\}$$

この時、$\displaystyle \mathcal{N}(\Omega) \cap W = \coprod_{m=m_0}^{\infty} \left(\mathcal{N}_m^+ \amalg \mathcal{N}_m^- \right)$

ここで $\mathcal{N}_m^\pm$ ($\mathbb{N} \ni m \geqq m_0$) は、$\mathcal{N}_m^{+0}$ 又は $\mathcal{N}_m^{-0}$ に、$m \to \infty$ の時、$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M$ の距離で、$m^{-\frac{1}{2}}$ の order で漸近的に近づく、$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M$ の、$K/M \simeq S^{n-1}$ と analytic diffeo な、可算無限個の disjoint な regular submanifold である。

但し、

$$\begin{cases} \mathcal{N}_m^{+0} \underset{\text{def}}{=} \left\{ \left(\dfrac{\pi\left(2m + \frac{n-1}{2}\right)}{R(C_2(b) - C_1(b))} + i\left(\dfrac{d(b)}{R} - \dfrac{n-1}{2}\right), b \right) : b \in K/M \right\} \\ \mathcal{N}_m^{-0} \underset{\text{def}}{=} \left\{ (\zeta, b)\ ;\ (-\bar{\zeta}, b) \in \mathcal{N}_m^{+0} \right\} \end{cases} \quad \mathbb{N} \ni m \geqq m_0$$

注意(2.2) 特に、零点集合の漸近形から、$b \in K/M$ 方向の Ω の '直径' $C_2(b) - C_1(b)$、及び対応する '曲率' の比 $K_1(b)/K_2(b)$ の情報が読みとられる。一方 $K_i(b)$ はそれぞれ $C_i(b)$ の微分を用いて表されるから、結局 $\mathcal{N}(\Omega)$ の漸近形から、例えば C_1 に関する K/M 上の単独微分方程式 ($n=2$ では非線型) を得る。尚、X の強凸領域 Ω は C_1 (及び C_2) から再現可能である事に注意。

§3　球の摂動とPompeiuの問題（$\mathbb{R}^n$の場合）

さて、$\hat{\chi}_\Omega$の零点が球面になる場合には、色々な問題と関連していて特に興味がある。

簡単のため、$\mathbb{R}^2 \supset \Omega$が有界凸集合とする。

Fact 2（[Br−K], [Br−T], [Be]）

$M(2) := O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$を Euclid motion group とする。

$\alpha \in \mathbb{C}^\times$に対し、$M_\alpha := \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2 : \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = \alpha\}$（複素球面）

この時、Ωに関する次の4つの条件は同値

i) $M_\alpha \subset \mathcal{N}(\Omega)$

ii) $C(\mathbb{R}^2) \ni {}^\exists f \not\equiv 0$ s.t. ${}^\forall \sigma \in M(2)$, $\iint_{\sigma\cdot\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = 0$

iii) $C(\mathbb{R}^2) \setminus \underset{\text{holomorphic}}{\mathcal{O}(\mathbb{C})} \ni {}^\exists f$ s.t. ${}^\forall \sigma \in M(2)$, $\int_{\sigma\cdot\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$

iv) $C^1(\mathbb{R}) \ni {}^\exists u \not\equiv 0$ s.t. $\begin{cases} \Delta u + \alpha u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \text{const} & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$

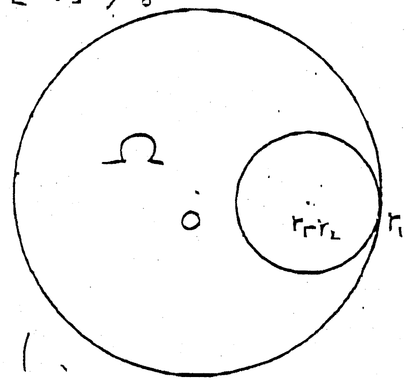
Ω＝円板はi)〜iv)を満たす例である。一方、Ω＝多角形領域は、i)〜iv)を満たさない事が知られている。

$\partial\Omega \simeq S^1$ (homeo) の時にii)を満たすΩは円板に限るだろうという予想がPompeiuの予想(1929)、ii)を満たすΩ（$\partial\Omega$の条件をつけない）の例を求める問題がPompeiuの問題と言われる。

i)はこの論説の動機となった問題であり、iii)は複素関数論

で有名なMoreraの定理の'逆'にあたる事からMoreraの問題と言われ、iv)はplasma physicsやnuclear reactorの問題に関連する微分方程式である。一方iv)に類似した、流体力学に現れる問題『$\Delta u = -1$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \mathrm{const}$ $\Rightarrow$ Ωは円板』は、Serrinによって肯定的に解決された([Se], [W])。

Pompeiuの問題に関しては、円板以外の例として、例えば、$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < r_1^2,\ (x-r_1+r_2)^2+y^2 > r_2^2\}$（但し、$r_1 > r_2$は$J_1(r) = 0$の根）は、i)〜iv)を満たす単連結な領域である。しかし、この様に円板を組み合わせた領域以外にi)〜iv)を満たす例は知られていない。



Pompeiu予想に関しては、$\mathbb{R}^2$の凸領域に限っても、現在なおopenである。[Br K]では、部分積分を用いる簡単な評価によって、i)〜iv)を満たす$\mathbb{R}^2$の凸集合の直径のminとmaxの比が2以下である事を指摘した。即ち、i)〜iv)を満たすΩは円板にある程度'近い'。

この節では、逆にΩが球に充分'近け'れば、球以外には、i)〜iv)の性質を持つΩが存在しない事を示す。

Ω = unit ball $\subset \mathbb{R}^n$の滑らかな変形Ω_tを考える。この時、凸集合であるという性質はopen conditionであるから、

変形は極座標を用いて定義できる（即ちΩ_tは原点0に関して星状領域としてよい。）

ところで、Ωの平行移動は、Fourier変換に絶対1の関数がかかるだけであるから、特に$\mathcal{N}(\Omega)$は不変である。従って、Ωの変形を考える時、平行移動をmoduloにして考える必要がある。

$\mathbb{R}^n$からinduceされたmetricに関するS^{n-1}上のLaplacian $\Delta_{S^{n-1}}$の固有空間分解を、

$$L^2(S^{n-1}) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \oplus E_k \quad ②,$$

E_kは$\Delta_{S^{n-1}}$の固有値$-k(k+n-2)$に対応する固有空間。

$\Omega =$ unit ballの平行移動の第1変分（正確には平行移動の作るvector場と、S^{n-1}の法vectorの内積が作るS^{n-1}上の関数）が、E_1に対応する事は容易にわかる。

以上から、$\Omega =$球の近くで、そのFourier変換の零集合が球面を含むのは、その領域が球の時に限るという定理の定式化を次の様に得る。

<u>定理3</u>　$g : (-\varepsilon, \varepsilon) \times S^{n-1} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ を、

$$\begin{cases} g(0,\eta) = 1 & {}^\forall \eta \in S^{n-1} \\ \left.\dfrac{\partial g}{\partial t}\right|_{t=0} = h(\eta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} h_k(\eta) & \text{(②の分解)} \end{cases}$$

この時　$h_1(\eta) = 0$ & $h \neq \text{const.}$

更に　$\|h\|_{\infty} = 1$，　$|g_{tt}(t,\omega)| < D$　$({}^\forall t, {}^\forall \omega)$とする。

Ω_tを、$\partial\Omega_t = \{g(t;w)\cdot w \in R^n ; w \in S^{n-1}\}$で囲まれる星状領域とする。 Ω_0 = 単位球 である。

$^\forall R > 0$ fix.

$J_{\frac{n}{2}}(r) = 0$ の $0 < r < R$ なる解を $r_1, r_2, \cdots, r_k$ とする。

この時、次元nとRのみによって決まる定数$C(n,R)$が存在して、

$0 < {}^\forall t < \frac{C(n,R)}{1+D} \min_{1\le j\le k} \left[\sum_{k\neq 0} \|h_k\|^2_{L^2(S^{n-1})} \, J_{k+\frac{n}{2}-1}(r_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ の時、

$n(\Omega_t)$は$\{x \in R^n : |x| < R\}$の実超球面を決して含まない。

注意(3.1) 右辺$\neq 0$

これは、『$\nu \in Q$の時、$J_\nu(r)$と$J_{\nu+m}(r)$ $(m \in Z, m \neq 0)$は$r = 0$以外に零点を共有しない』([Er]) という定理から従う。

(3.2) 定理3より、特に$\{x \in R^n : |x| < R\}$の中で原点を中心とする超球面が$n(\Omega_t)$に含まれない事から、Ω_0=球の'近く'(1 parameterの意味で)にはi)〜iv)を満たす領域は、球に限る事がわかる。(定理3は、中心が原点とは限らない超球面の可能性も否定している。)

最後に、1 parameterの摂動の考察を、微分方程式の立場から見よう。簡単のため、$n = 2$で考える。

R^2の領域Ωの滑らかな変形は、($\partial\Omega$方向の調整をする事に

より）第1変分は$\partial\Omega$のnormal方向としてよい。このnormal方向の成分を$f \in C^\infty(\partial\Omega)$とする。

今、boundaryの滑らかな領域Ωの滑らかな変形を$\{\Omega_t\}_{-\varepsilon<t<\varepsilon}$とした時、$^\exists\alpha \neq 0$, $\mathcal{N}(\Omega_t) \supset M_\alpha$（仮）とする。この時、Fact 2より、$\Delta u + \alpha u = 0$ in Ω_t; $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega_t} = 0$, $u|_{\partial\Omega_t} = 1$ なる解$u(t;x,y)$が存在する（解は一意的）。

$v := \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}$ はΩ上、次の微分方程式を満たす。

$$\Delta v + \alpha v = 0 \text{ in } \Omega \ ; \ v = 0, \ \frac{\partial v}{\partial n} = \alpha f \text{ on } \partial\Omega \quad \text{③}$$

一方、$\mathcal{N}(\Omega) \supset M_\alpha$という条件は、$O(2) \ltimes \mathbb{R}^2 \curvearrowright \Omega \subset \mathbb{R}^2$の作用で不変である事に注意すると、次のProp 2を得る。

<u>Prop 2.</u> Ωが円板の時 $\Longrightarrow k(\Omega,\alpha) = 2 \ (^\exists\alpha)$

円板以外のΩが說, i)〜iv)を満たす $\Longrightarrow k(\Omega,\alpha) \geq 3$

但し、$k(\Omega,\alpha) := \dim \{ v \in C^1(\bar{\Omega}) : (\Delta+\alpha)v = 0 \text{ in } \Omega, \ v|_{\partial\Omega} = 0 \}$

<u>注意(3.3)</u> [FTY]で、単連結領域'全体'が作るHilbert多様体（境界のSobolev normによる位相）の中で、$\{\Omega : k(\Omega,\alpha) \leq 1 \text{ for } ^\forall\alpha\}$はresidual (i.e. open denseな可算個の集合の共通集合）である事を示している。従って<u>Prop 2</u>より、i)〜iv)を満たさない単連結領域も同様にresidualである。

§4 証明の方法

詳しい証明は、別の機会に譲ることにし、ここでは証明の方針を述べる。

定理1、定理2は、χ_Ω をまず Radon 変換（$\mathbb{R}^n$では超平面、$\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$では horosphere 上の積分）し、その singularity（Ω の幾何的量で表される）が、動径方向（1次元）の Fourier 変換で、無限遠の漸近挙動にどう反映されるかを計算してやればよい。

Cor 1 は、$n=2$ では h と K が線型常微分方程式の関係である事より、$n(\Omega)$の情報から h の単独線型常微分方程式が得られ、簡単に証明ができる。

Cor 2 の i), ii) は Alexandroff-Fenchel-Jessen-Chern ([Ch]) の定理：「$K \circ e^{-1}: S^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ が一致する strictly convex domains は、平行移動で互いに移りあう」(Minkovski の定理の一意性) を使って示される。

定理3は、Fourier 変換の parameter $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n \ni \xi$ を極座標 (r, ω) を用いて表した次の式を用いて証明される。

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \hat{\chi}_{\Omega_t}(r, \omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{r^{\frac{n}{2}-1}} \sum_{k=0}^{\infty} i^k h_k(\omega) J_{k+\frac{n}{2}-1}(r)$$

$$\hat{\chi}_{\Omega_0}(r, \omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{r^{\frac{n}{2}}} J_{\frac{n}{2}}(r)$$

References

[Be] C. A. Berenstein: An inverse Spectra theorerm and its relations to the Pompei problem, J. D'analyse Math. 37 (1980), 128-14

[BeY] C. A. Berenstein, P. Yang: Overdetermine Neumann problem in the unit disk, Advances in Math. 44, (1982), 1-17

[BrK] L. Brown, J. P. Kahane: A note on the Pompeiu problem for convex domains, Math Ann. 259, 107-110 (1982)

[BrST] L. Brown, B. Schreiber, B. A. Tailor: Spectral synthesis and the Pompeiu problem Ann. Inst. Fourier, Gren. 23, 125-154 (1973)

[C] S. S. Chern: Integral formulas for hype surfaces in Eucledian space and thei applications to uniqueness theorems, J. Math and Mech. 8 (1959), 947-955

[E] A. Erdélyi et. al.: Higher transcendenta functions, Vol. 2 McGraw-Hill, 1953

[H] S. Helgason: Groups and geometric analysi AP (1984)

[G] I. M. Gelfand et. al: Generalized function (translation) Vol 1, 5, AP (1964, 1966)

[FTY] D. Fujiwara, M. Tanikawa, S. Yukita: Th spectrum of the Laplacian and boundar perturbation. I, Proc. Japan Acad. 54, (1978 87-91

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations o differential geometry, Vol. 2, John Wile & Sons, Inc. (1969)

[M] J. Milnor: Morse Theory, Annals of Mat Studies, No. 51, Princeton, N. J., 1963

[Sa] T. Sasaki: Minkowski's problem and rea Monge-Ampère equations (in Japanese), Gekkan. Math. 1 No. 7 (1980), 522-532

[Se] J. Serrin: A symmetry problem in potential theory, Archiv. for Rat. Mech and Ana 43 (1971), 304-318

[W] H. F. Weinberger: Remark on the precedin paper of Serrin, Archiv. for Rat. Mech an Anal. 43 (1971), 319-320