半単純リー群のユニタリ表現の離散分岐理論とその展開

小林 俊行 (Toshiyuki KOBAYASHI)

東京大学大学院 数理科学研究科 (University of Tokyo),
E-mail: toshi@ms.u-tokyo.ac.jp

要旨: まず, 半単純 Lie 群のユニタリ表現の分岐則の中で「良い振る舞い」をするクラスとして「離散的分岐則」の定義と特徴づけを与える (§2)。§3 では, 離散分岐理論を契機として表現論内部に新しく起こりつつある話題を述べる (分岐則の計算, Wallach の予想, Kostant-Schmid の公式の一般化, 無限次元表現論の代数的手法としての離散的分岐則など)。一方, §4 では 離散分岐理論が他の分野 (保型形式, 非可換調和解析, 不連続群論など) にどのように応用され, どのように関わるかを述べる。なお, §1 では, これらの背景として Lie 群の表現論の大きな流れの一つを紹介する。そこで取り上げる話題は Lie 群の表現論のもちろんすべてではないが, 最も主要な部分の一つである。

§0. Fourier 級数, Fourier 展開 と 隠れた対称性

最初に, Fourier 級数 と Fourier 変換の比較から始めてみよう。

$$L^2(\mathbb{T}) \text{ の Fourier 級数展開} \qquad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{\sqrt{-1}nx} \qquad (\text{離散的な和})$$

$$L^2(\mathbb{R}) \text{ の Fourier 変換} \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\zeta) e^{\sqrt{-1}\zeta x}\, d\zeta \quad (\text{連続的な和})$$

前者は<u>離散</u>スペクトラムのみによる展開であり, 後者は<u>連続</u>スペクトラムのみによる展開であることに注目しよう。この事実は, さまざまな視点から解釈することができるだろう。例えば,

(1 番目の解釈) 逆変換公式を直接求めれば, もちろん 1 つの証明となる。

(2 番目の解釈) 微分方程式の立場からは, Fourier 展開はラプラシアン $\frac{d^2}{dx^2}$ による固有函数展開と解釈できる。「コンパクト多様体では, ラプラシアンは点スペクトラムしかもたない」という事実の特別な場合として, Fourier 級数の離散性を説明することもできる。

(3 番目の解釈) 表現論の立場からは, Fourier 展開は $\mathbb{R}$ の正則表現

$$L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), f(x) \mapsto f(x-a) \qquad (a \in \mathbb{R})$$

を $\mathbb{R}$ の既約ユニタリ表現

$$\chi_\xi \colon \mathbb{R} \to U(1), x \mapsto e^{\sqrt{-1}x\xi} \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

によって既約分解する公式と解釈できる (同様に, $\mathbb{T}$ の正則表現 $L^2(\mathbb{T})$ を既約分解する公式が Fourier 級数展開であると解釈できる) 。「コンパクト群の正則表現は既約表現の離散直和に分解される」という Peter-Weyl の定理を $\mathbb{T}$ に適用することによって, Fourier 級数展開の離散性を説明することもできる。

(4 番目の解釈) やはり表現論的な立場であるが, $L^2(\mathbb{T})$ や $L^2(\mathbb{R})$ において明らかに現れている加法群 $\mathbb{T}$ や $\mathbb{R}$ だけではなく, 背後に潜む非可換な群 $SL(2,\mathbb{R})$ の作用 (隠れた対称性) もこめて考えることにより, 上記のスペクトラムにおける連続と離散の差異をより深く解明することができるであろう。これが, 本稿で扱う問題意識の最も単純な場合となる。まず, $SL(2,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ (正確には $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$) に一次分数変換

$$\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto g\cdot x := \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (x\in\mathbb{R}, g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R}))$$

として作用する。従って, $SL(2,\mathbb{R})$ の元 g は $\mathbb{R}$ 上の函数 $f(x)$ の変換

$$f(x)\mapsto(\pi(g)f)(x) := f(g^{-1}\cdot x)$$

を定める。この定義では $f\in L^2(\mathbb{R})$ であっても$\pi(g)f\in L^2(\mathbb{R})$ とは限らないので修正項を加えよう。$\zeta=\xi+\sqrt{-1}\eta\in\mathbb{C}$ に対し, 対応する重み (multiplier) をつけ加えて

$$f(x)\mapsto(\pi_\zeta(g)f)(x) := (cx+d)^\zeta f(g^{-1}\cdot x)$$

と定義すると, 簡単な変数変換から

$$\|\pi_\zeta(g)f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty}|a-cy|^{-2-2\xi}|f(y)|^2\,dy$$

となることがわかる。従って $\xi=-1$ すなわち $\mathrm{Re}\,\zeta=-1$ のとき$\pi_\zeta(g)$ は $L^2(\mathbb{R})$ のユニタリ作用素である。さらに,

$$\pi_\zeta(g_1)\pi_\zeta(g_2)=\pi_\zeta(g_1g_2) \qquad (g_1,g_2\in SL(2,\mathbb{R}))$$

が成り立つので, 結局 $\zeta\in-1+\sqrt{-1}\mathbb{R}$ のとき $(\pi_\zeta, L^2(\mathbb{R}))$ は $SL(2,\mathbb{R})$ のユニタリ表現を定義する。この表現は $SL(2,\mathbb{R})$ の主系列表現と呼ばれる古典的な既約ユニタリ表現である (V. Bargmann, 1947 Ann.Math.) 。

$$G=SL(2,\mathbb{R})\supset G' := \{n_a := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1\end{pmatrix} : a\in\mathbb{R}\}$$

とおく。G' は実数の加法群 $\mathbb{R}$ と同型な群である。

$$(\pi_\zeta(n_a)f)(x) = f(\frac{1\cdot x-a}{0\cdot x+1}) = f(x-a)$$

であるから, $\mathrm{Re}\,\zeta=-1$ となる ζ に対し既約ユニタリ表現

$$\pi_\zeta\colon G\to U(L^2(\mathbb{R})) \qquad (U(L^2(\mathbb{R}))\text{ を }L^2(\mathbb{R})\text{ のユニタリ作用素全体})$$

を G の部分群 G' に制限すると これは $\mathbb{R}$ の正則表現に他ならない。故に

Fourier 変換 $=SL(2,\mathbb{R})$ の主系列表現を部分群 $\mathbb{R}$ に制限したときの分岐則

と解釈できる。同様に, (適当な変数変換をすると) $SL(2,\mathbb{R})$ の主系列表現を $L^2(\mathbb{T})$ に実現し, $SL(2,\mathbb{R})$ の部分群

$$SO(2)=\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} : \theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}\simeq\mathbb{T}$$

にこの表現を制限したときの分岐則が Fourier 級数で与えられる。図式で書くと,

隠れた対称性

$$G' \quad \subset \quad G \xrightarrow{\pi} GL(\mathcal{H})$$

対称性の破れ

において, 制限 $\pi|_{G'}$ の既約分解を与える公式 (分岐則) は, 以下のようになる:

$$\text{Fourier 変換} \quad \cdots\cdots\ G = SL(2,\mathbb{R}),\ \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}),\ G' \simeq \mathbb{R}$$

$$\text{Fourier 級数展開} \quad \cdots\cdots\ G = SL(2,\mathbb{R}),\ \mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}),\ G' \simeq \mathbb{T}$$

本稿では, Lie 群 G の既約ユニタリ表現 π を 部分群 G' に制限したときの既約分解 $\pi|_{G'}$ (分岐則) がいつ離散的になるかの判定条件を与える。G' がコンパクトなら分岐則は離散的となる (従って, Fourier 級数が離散的であることの説明ができる) が, 面白いことに, G' が非コンパクトでも離散的な分岐則は起こりうることがわかる。これを正確に定式化し, 何を意味するのか説明するために, §1 で Lie 群やユニタリ表現論をごく簡単にサーベイをしよう。

§1. より根源的なものへ

Lie 群 (連続群) は, 1870 年代 偏微分方程式の解の変換群として, Sophus Lie (1842–1899) によって創始され開拓された概念である。Lie 群やその表現論は, 現在に至るまで解析, 幾何, 代数が幾重にも交錯する場となっている。20 世紀初頭以来, Lie 群の表現論にどのような概念が生まれ, 現在までに何が解決し何が未解決なのか, そして 今後 どういう方向への発展が期待できるのであろうか? まずは, 「既約なものの分類と既約なものへの分解」— 喩えて言えば, 化学で分子を記述するには原子 (あるいは素粒子) の分類とその組成 (繋がり方) を調べることが出発点となるように— という観点に沿って, 現状を整理してみよう。

1.1. Lie 群と Lie 代数 (例えば, 教科書 [19], [61], [102] 参照).
既約な対象: 非自明なイデアルを持たない ($\mathbb{R}$ 上の有限次元) Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は, $\mathbb{R}$ または 単純 Lie 代数に限る。$\mathbb{R}$ 上の単純 Lie 代数は $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}), \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}), \mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{su}^*(2n), \mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{so}(p,q), \mathfrak{sp}(p,q), \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ という古典型の 10 系列と 22 個の例外型に分類される (É. Cartan, 1914) 。単純 Lie 代数の分類は, 単連結な既約 Riemann 対称空間の分類と同値である。その分類においては, Dynkin 図形に情報を付加した佐武図形によって記述するのが便利である。
既約なものへの分解: 任意の有限次元 Lie 代数は 単純 Lie 代数と $\mathbb{R}$ たちの拡大 (extension) によって得られる。但し, 低次元の場合を除いては Lie 代数の拡大は複雑すぎて, それを完全に記述する手段は現状では知られていない (例えば, べき零 Lie 代数は低次元の場合しか分類されていない) 。そこで 拡大のない場合を考えよう。$\mathbb{R}$ と 単純 Lie 代数の直和で表される Lie 代数を簡約 Lie 代数といい, 単純 Lie 代数だけの直和で表される Lie 代数を 半単純 Lie 代数という。
Lie 群: 群と多様体の構造を合わせ持つのが Lie 群である。Lie 理論により Lie 群の (局所的な) 性質がすべて その Lie 代数の性質として記述できる。非自明な連結正規部分群を持たない連結 Lie 群は, $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ (トーラス) または 単純 Lie 代数に対応した Lie 群 に限る。$SL(n,\mathbb{R})$, $Sp(n,\mathbb{R})$, $SU(p,q), \ldots$ などがその例である。対応する Lie 代数が 簡約であるような Lie 群を簡約 Lie 群という。簡約 Lie 群は $\mathbb{R}$ および 単純 Lie 群の直積に局所同型である。
線型群: 簡約 Lie 代数にはさまざまな特徴づけが知られており, 従って同値な定義を種々与えることができる。なじみやすいと思われる別の定義も与えておこう。

$$\mathfrak{g} \text{ が 簡約 Lie 代数} \Leftrightarrow \mathfrak{g} \text{ は } M(n,\mathbb{R}) \text{ の部分 Lie 代数で } X \in \mathfrak{g} \text{ ならば } {}^tX \in \mathfrak{g}\text{。}$$

同様に, $GL(n,\mathbb{R})$ の (高々有限個の連結成分を持つ) 部分群 G が転置で閉じている (${}^tG = G$) ならば G は 簡約 Lie 群となる。このような G を線型簡約 Lie 群という。逆に, 任意の簡約 Lie 群は 線型簡約 Lie 群の被覆となる。

1.2. Lie 群の表現論の基本課題.

変換群と線型表現: そもそも, 空間への変換の合成法則を抽象したものが群の起源である。すなわち, 一つのカテゴリーにおける対象 X を考えれば, X の自己同型全体からなる群 $\mathrm{Aut}(X)$ が自然に定義される。群 G から $\mathrm{Aut}(X)$ への準同型写像を与えることはすなわち群 G の X への作用を定めることに他ならない。特に X がベクトル空間のとき準同型写像 $G \to GL(X)$ (X の線型同型写像全体のなす群) を G の 表現 という。さらに, X が Hilbert 空間のとき, 準同型写像 $G \to U(X)$ (X のユニタリ作用素全体のなす群) を G の ユニタリ表現という。

線型化: 群 G が集合 X に作用しているとする。この作用を $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto g \cdot x$ と書く。このとき $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ が成り立つ。X 上の函数空間 $\Gamma(X)$ (必要に応じて函数のクラスを決める) に表現 $\pi : G \to GL(\Gamma(X))$ を $\pi(g)f(x) := f(g^{-1} \cdot x)$ と定義することができる。さらに X に G-不変測度 μ が存在するならば $\Gamma(X) := L^2(X, \mu)$ 上に G のユニタリ表現が自然に定義される。このように, 非線形な作用から「線型化」によって表現が自然に現れる。

表現論の中心課題: 上述したように, 数学のそれぞれの分野 (勝手なカテゴリーの勝手な対象 X) から群や表現, すなわち 自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ や $\Gamma(X)$ 上の表現が自然な対象として現れる。もとのカテゴリーを (形式的に) 捨象して, 作用および群論的性質を研究するのが群の表現論である。しかし (というより当然のことながら), 表現論の実際の手法は, 表現論独自の手法というよりは, その表現をどのように実現するかに依存して数学のさまざまな分野を基盤としている。逆に, ひとたび表現論的な結果が得られれば, 同型な表現が現れる 異質の対象間に新しい結びつきを予知したり, 異なる分野に新しい手法を与えたりすることが期待される。

従って, 表現論では常に表現論の外部との接触が重要であると考えられるが, それを踏まえた上で 表現論内部の中心課題は次の 2 つに大別される:

(1) 既約な表現 (の同値類) を分類し, それを理解せよ。
(2) 与えられた表現を既約分解せよ。

(1) には, 既約表現の構成, 分類のパラメータ (指標やその他種々の不変量) の発見と計算, ユニタリ性の判定などの問題が含まれる。

群 G の既約ユニタリ表現の同値類全体を $\widehat{G}$ と表す。Lie 群 G の任意のユニタリ表現は既約ユニタリ表現に分解される ([93] 参照) 。ある場合には既約分解は有限または可算直和で記述され, またある場合には「連続」直和, すなわち 直積分 (direct integral) で記述される。例えば, §0 でみたように, Fourier 級数, Fourier 変換は, $G = \mathbb{T}, \mathbb{R}$ のユニタリ表現 $L^2(\mathbb{T})$ や $L^2(\mathbb{R})$ の既約分解を与える。

(2) の特別な場合として

2-a) 制限の分解: $H \subset G$ を部分群, π を G の既約ユニタリ表現とする。π を H の表現に制限すると H の表現としては一般に既約でない。$\mathrm{Rest}^G_H(\pi) = \pi|_H$ の既約分解を (表現の)分岐則(branching law) とよぶ。例えば量子力学での「対称性の破れ」の記述に対応する。テンソル積表現 $\pi_1 \otimes \pi_2$ の分解も分岐則の特別な場合である。

2-b) 誘導表現の分解: $H \subset G$ を部分群, σ を今度は H の既約ユニタリ表現とする。表現の制限の双対的な概念として, 誘導表現 $\mathrm{Ind}^G_H(\sigma)$ が定義される。これは既約とは限らない G の表現である。函数空間やベクトル束の切断の空間, あるいは コホモロジーとして幾何的に実現される G の表現は基本的に誘導表現のタイプである。特に等質空間上の大域解析は σ が自明表現 $\mathbf{1}$ の場合に対応する。

1.3. Lie 群の表現論の基本課題に関する現状.

Lie 群の既約表現の分類について: 群拡大に対する既約ユニタリ表現の構造を解析することにより, 一般の Lie 群の既約ユニタリ表現の分類において, 「原理的[1]の既約ユニタリ表現に関す

[1] 「原理的」というのは自明という意味ではない。例えば, べき零 Lie 群 ($\mathbb{R}$ の群拡大で得られる Lie 群) にこの原理を使って, Kirillov はべき零 Lie 群の既約ユニタリ表現を分類し, 軌道法 (orbit method) の概念に到達した (1962) 。

る」には単純 Lie 群の既約ユニタリ表現が最も基本的な役割を果たす。そこで, 以下では, 単純 Lie 群 (あるいは 少し一般に簡約 Lie 群) の既約表現を扱おう。

既約有限次元表現の分類: Cartan-Weyl の最高ウェイト理論によって既約有限次元表現の分類が完成した (1925)。すなわち, G の既約有限次元表現 F は Borel 部分代数の 1 次元表現 χ によって分類される。逆に χ から F を構成する方法には, Verma 加群の既約商加群をとる代数的方法や Borel-Weil-Bott による複素多様体上の幾何的構成法 ([89]) などが知られている。

簡約 Lie 群の既約表現の分類: 1970 年代後半から 1980 年代初頭に (位相を類別しない立場での) 分類が完成した。大別して次の 3 種類の方法が知られている。

(1) 行列要素の漸近挙動に注目した Langlands による解析的な手法と Knapp-Zuckerman による R-群を用いた緩増加表現の記述に基づく分類 ([65], [28]),
(2) Vogan の minimal K-type 理論と Zuckerman の導来函手加群 (Borel-Weil-Bott 理論の一般化) および Lie 代数のコホモロジー (最高ウェイトの一般化) を用いる代数的な分類法 ([95], [96]),
(3) Beilinson-Bernstein, Brylinski-柏原 による旗多様体上の $\mathcal{D}$-加群の理論と $K_{\mathbb{C}}$-軌道の幾何に基づく分類[2]([3])。

これらの相互関係については, 1980 年代後半より, 柏原, Schmid, Hecht, Miličić, Wolf, Vilonen, 宇沢, Mirkovic, 落合 (啓) などによって研究されている。

簡約 Lie 群の既約ユニタリ表現の分類: V. Bargmann による $SL(2,\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現の分類 (1947 Ann. Math.) 以来, Gel'fand-Naimark, Vakhutinski, 土川, 平井, Diximier, Thieleker, Kraljevic, Silva, Duflo, Speh, Barbasch, Vogan 等による個々の場合の多くの文献があるが, 約半世紀過ぎた 1999 年現在においても, 簡約 Lie 群の既約ユニタリ表現の分類はまだ未解決である。すなわち, 既約表現 (分類済み) の中で ユニタリ内積を持つものが決定されていない。分類が完成した単純 Lie 群は, 実ランク 1 すべてと若干の低ランクの単純 Lie 群の他, $SL(n,\mathbb{R})$, $SU^*(2n)$, $SL(n,\mathbb{C})$, $SO(n,\mathbb{C})$, $Sp(n,\mathbb{C})$ などである。逆に, 古典型の単純 Lie 群でも $SO(p,q)$, $SU(p,q)$, $Sp(p,q)$, $Sp(n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$ といった Lie 群の既約ユニタリ表現の分類は p,q,n が一般の場合未完成である。また, 既約ユニタリ表現の中で特別なクラスとしては,

i) 既約ユニタリ最高ウェイト表現[3]に関しては 1980 年代初頭に分類が完成した ([11])。
ii) regular integral な無限小指標を持つ場合には Salamanca-Riba, Vogan による研究が進んでいる。

既約ユニタリ表現の構成とユニポテント表現: 既約ユニタリ表現を構成する手法としては, 通常の放物型誘導表現 (例えば 主系列表現 [102]) とそのユニタリ内積の解析接続 (補系列), および 1970 年代後半の Zuckerman の導来函手加群 ([27], [96], [101]) が知られている。これらの函手によって, 既約ユニタリ表現の分類を「より簡単な」既約ユニタリ表現の分類に帰着させようという方針で 1980 年代半ば以降 Vogan を中心に研究が進められている ([99])。すなわち, ユニタリ性を保存する導来函手自身の性質とこれ以上簡単な表現からは誘導できないような既約ユニタリ表現 (ユニポテント表現 がこれに相当する概念である) の分類が主要な問題になる。

前者の函手については,

i) 一般論は Zuckerman, Vogan, Wallach などの結果 ($\sim$ 1984) (例えば [97], [100]) をまとめた教科書や概説記事 [27], [39], [96], [99], [101] など,
ii) 特異パラメータに関する既約性や非消滅の条件に関しては 松木-大島[72], 松木 (1998), Vogan(1988)[98], 小林 (1992) [34] など

の代数的な結果がある。

後者のユニポテント表現については, 一次元表現や metaplectic 群の Segal-Shale-Weil 表現がその典型例であるが, 1990 年代に入って, その他の群のユニポテント表現の構成が, Kostant,

[2] ただし, 既約表現の分類を $\mathcal{D}$-加群の立場で特異パラメータの場合をこめて完遂した文献は現在なお現れていないようである。

[3] 例えば, Segal-Shale-Weil 表現の成分, 正則離散系列表現など。

Kazhdan, Binegar, Zierau, Huang, Zhu, Li, Torasso, Gross, Wallach, Kobayashi, Ørsted などにより盛んに行われている ([14], [60], [67], [64] など)。その手法としては,

i) Howe の dual pair を用いる構成 (Huang, Zhu, Li など)
ii) 退化主系列の部分表現として実現する構成 (Kostant 1989, Binegar-Zierau など)
iii) Conformal geometry を用いる構成 (小林-Ørsted, 1991)
iv) 極大放物型部分群への制限を用いる構成 (Torasso, 1997)

などさまざまであり, また, これらのユニポテント表現同士には後述する「離散的分岐則」とも深い繋がりがあることが次第にわかりつつある ([14], [67], [60] 参照)。

誘導表現の既約分解 (非可換調和解析) について: (解決した場合) Lie 群 G の閉部分群 H の既約ユニタリ表現 τ からの誘導表現は G/H 上の G-同変ベクトル束の切断の空間に実現される。特に, τ が自明な一次元表現 $\mathbf{1}$ の場合, $\mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{1}) = L^2(G/H)$ の既約分解を具体的に与える定理は Plancherel 型の定理とよばれ, G/H が次のような場合に具体的な既約分解が得られている ([10], [16], [18], [84]): まず G/H が群多様体 $G' \times G'/\operatorname{diag}(G')$ の場合, G' が $\mathbb{T}$ や $\mathbb{R}$ に対して Parseval-Plancherel の公式, コンパクト群 G' に対して Peter-Weyl 理論 (1927), 簡約 Lie 群 G' に対して Harish-Chandra (1976); 次に, G/H が対称空間の場合, Helgason (Riemann 対称空間), 大島-関口 (次), Delorme, van den Ban - Schlichtkrull (簡約対称空間) など。

これらの既約分解において, 離散系列表現 (§4.3) は特に重要な役割を果たす。

(未解決の場合) 上記の例はいずれも $G \supset H$ がともに簡約な Lie 群の場合であるが, 対称空間や群多様体以外の簡約型等質多様体 G/H の Plancherel 型定理は未解決な問題である。新しい方向として, 古典的な積分幾何を変分法から見直すという Gindikin-小林の普遍逆公式を用いた結果 ([42]) がある。

次に, τ が一般の既約ユニタリ表現の場合は, べき零 Lie 群に関しては orbit method による美しい解答がある反面, 簡約 Lie 群に関しては まだ研究が少なく, これからの課題である。そして, その Frobenius 双対に相当するのが 次の問題である。

制限の既約分解 (分岐則) について: ユニタリ表現の制限問題は, その発展と応用が, 今後ますます興味深いと筆者が期待している分野であるが, これまでは非常に限られた場合にしか研究されていない。

(研究されている主な対象) G を簡約 Lie 群, K を G の極大コンパクト群とする (例: $G = GL(n,\mathbb{R})$, $K = O(n)$)。

i) 任意の $\pi \in \widehat{G}$ に対し, 制限 $\pi|_K$ は離散的かつ重複度有限の既約分解をもつ (Harish-Chandra, 1950 年代 [15])。この定理は, 簡約 Lie 群のユニタリ表現論を $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群という代数的な対象として扱うことを可能にした重要な結果である。この定理の非コンパクトな部分群への拡張が §2 のテーマとなる。また, 具体的な公式としては, 正則離散系列表現の Riemann 対称対に関する分岐則 (Hua-Kostant-Schmid により証明され[87], 小林により半単純対称対に一般化された[55]; §3.2 参照) や離散系列表現に対する Blattner 予想 (Hecht-Schmid により解決され, Vogan によって一般化された; [17], [96]) などが知られている。
ii) Mackey 理論 ([68]) を用いる手法により, 主系列表現など (古典的な意味での) 誘導表現を部分群に制限したときの分岐則は, (別の) 誘導表現の既約分解に帰着する。前項で述べたように, 帰着した問題自身の多くは残念ながら未解決である。この方向による発展は (簡約 Lie 群の場合)1970 年代頃までが主要なものであり, それ以降は, 非可換調和解析の発展に伴った結果が散見される。
iii) Weil 表現の reductive dual pair に関する分岐則は Howe 対応と呼ばれ, θ-lift など保型形式に重要な手法を与える。具体的な分岐則は, 離散スペクトラムを中心に, Howe, 柏原-Vergne, Adams 他多くの研究者によって 1970 年代以降, 活発に研究されている ([1], [21], [25])。

しかし, 離散系列表現のように 通常の誘導表現では表されない表現を非コンパクト部分群へ制限するといった問題は, 応用上重要であるにもかかわらずこれまであまり研究されて来なかった。§3 では, このような問題の糸口を見いだそう。ここで, もう一度 §0 の例を振り返る。

例 (**Fourier 変換 と Fourier 級数論**). 2つの解釈 (前者は well-known) を述べる:

1) (誘導; 正則表現の既約分解としての解釈) $G = \mathbb{R}$ のとき, 部分群 $\{0\}$ からの誘導表現 $L^2(\mathbb{R}/\{0\})$ の既約分解が Fourier 変換で与えられる。同様に $G = \mathbb{T}$ のときの $L^2(\mathbb{T})$ の既約分解が Fourier 級数展開に他ならない。
2) (制限; 主系列表現の分岐則としての解釈) $G = SL(2,\mathbb{R})$ のユニタリ主系列表現 を G の部分群 $\mathbb{R}$ や $\mathbb{T} \simeq SO(2)$ に制限したときの分岐則は Fourier 変換, Fourier 級数展開で与えられる。

非可換調和解析は, 従来, 例 (1) の延長線上に多く発展してきた。一方, 最近の wavelet 理論に見られるように, 例 (2) における一次分数変換群 $SL(2,\mathbb{R})$ のような隠れた対称性を積極的に用いることにより, より深い解析が可能になる場合がある。後者の方向で, 既約分解の測度の連続性, 離散性について考察するのが §2 のテーマである。すなわち, 逆 Fourier 変換における測度の連続性, Fourier 級数展開における測度の離散性という両極端の性質を $SL(2,\mathbb{R})$ という隠れた対称性から説明する試みの延長線上に理論を展開することになる。

§2. 離散的分岐則

2.1. 離散的分岐則とは何か.

ユニタリ表現の分岐則: 表現を部分群に制限して既約分解する, すなわち, 分岐則を求める問題を考えよう。有限次元表現の場合は計算の複雑さ, 組み合わせ論的困難さはあるものの原理的に指標の計算によって分岐則を求める手順が存在する。一方, 無限次元ユニタリ表現の場合は分岐則を求める一般的な手順そのものが知られていない。§1.3 の最後に述べた特別な場合を除き, ユニタリ表現の分岐則を求める問題は多くの重要な場合が 1990 年代初頭まで手つかずであった。無限次元ユニタリ表現の分岐則を求める際の困難さを列挙してみよう。

i) 離散系列表現など応用上重要な表現は, 通常の誘導表現としては表せないため, Mackey の古典理論が使えず, 分岐則の問題をより簡単な (あるいは低次元の) 問題に帰着させる一般論が今のところ見いだされていない。

ii) H が非コンパクトな部分群であるとき分岐則はしばしば離散スペクトラムと連続スペクトラムの両方を含むため代数的手法で分岐則を求めるのは困難である。

iii) (G,H) が半単純対称対のような良い pair であっても, 分岐則における H の既約ユニタリ表現の重複度はしばしば無限になる。

iv) (G,H) を止めたとき, 全ての $\widehat{G}$ の元 π に対して H への制限 $\pi|_H$ (分岐則) を求めることと, 全ての $\widehat{H}$ の元 τ に対し誘導表現 $\mathrm{Ind}_H^G(\tau)$ の既約分解を求めることとは困難さにおいてほぼ同程度と考えられる。後者の現状は, $\tau = \mathbf{1}$ に対する問題 (非可換調和解析) が現在の中心的発展段階であり, $\dim \tau = \infty$ の研究は殆ど未知である ([30], §1.3 参照)。

「良い枠組み」としての離散的分岐則: このようにすべての場合に対して 無限次元表現の分岐則の問題を考えるのは, あまりに多くの事柄が混在しており, 一般論を追求しても general nonsense になる危険性が高い。そこで 無限次元表現の分岐則を研究するために 「良い枠組み」を見つけることが重要であると考えられる。「良い枠組み」として

イ) 面白い例 (既知のものも未知のものも) や応用上重要な場合が多く含まれている
ロ) 分岐則を具体的に求めるのが容易 あるいは 原理的に可能であると期待される

という 2 点を満足するものとして, 次の定義を提案した (小林, Invent. Math. 1994)。

定義 **2.1** ([43]). $G \supset H$ をともに実簡約 Lie 群とし, $\pi \in \widehat{G}$ とする。制限 $\pi|_H$ が $\widehat{H}$ の離散直和で分解され, 各重複度が有限であるとき, $\pi|_H$ は H-admissible という。

例 **2.2.** 1) $H = K$ (極大コンパクト部分群) なら 任意の $\pi \in \widehat{G}$ に対して $\pi|_K$ は K-admissible である[4] (Harish-Chandra; §1.3 参照).

[4] 通常, この性質は 単に admissible と呼ぶ。定義 2.1 の用語はここから採用した。

2) π が Weil 表現, $H=H_1H_2$ が reductive dual pair[5]であって, H_1 がコンパクトならば $\pi|_H$ は H-admissible (Howe, [21]).

例えば, Fourier 級数は $SL(2,\mathbb{R})$ の主系列を $SO(2)$ に制限したときの分岐則に対応する。Fourier 級数は, 離散的な既約分解であり, 各既約表現 $e^{\sqrt{-1}nt}$ の重複度は 1 である (従って重複度有限でもある)。これは 例 2.2 (1) の最も簡単な場合である。

さて, 定義 2.1 のポイントは, 分岐則に連続スペクトラムが現れないという解析的な条件である。「離散的な分岐則」という概念は, 代数的に $(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)$-加群の言葉として定式化することもできる (小林, Invent. Math. 1998)。定義 2.1 と代数的な意味での離散的な分岐則という 2 つの概念は微妙に異なるが, 逆に, その違いを積極的に抉り出して活用することにより Wallach の予想が証明できる[58]。ここでは, 入門的な概説記事の枠をこえるため 代数的な定式化は割愛する。

上の定義 2.1 の意義は, これまで知られていなかった[6] 多くの組 (G,H,π) に対して分岐則 $\pi|_H$ が H-admissible となるという事実の発見 (定理 2.4) にある。すなわち, ユニタリ表現の分岐則の問題には実は 挑戦可能な問題が多く存在するのである。

2.2. 分岐則が離散的になるための判定条件.

簡約 Lie 群 G が $GL(n,\mathbb{R})$ に ${}^tG=G$ を満たすように実現されているとし, G および $K=G\cap O(n)$ の Lie 代数を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ と書く。$\mathfrak{k}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{t}$ を選び, Cartan-Weyl の最高ウェイト理論により $\widehat{K}$ と$\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ の格子点の部分集合である integral dominant weight とを同一視する。次の定義は柏原-Vergne [26] によるものである。

定義 **2.3** (Asymptotic K-support). $\pi\in\widehat{G}$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathrm{Supp}_K(\pi)&:=\{\tau\in\widehat{K}:\mathrm{Hom}_K(\tau,\pi|_K)\neq 0\}\ (\subset\widehat{K}\subset\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*),\\ \mathrm{AS}_K(\pi)&:=\mathrm{Supp}_K(\pi)\infty\ (\subset\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*).\end{aligned}$$

ここで, $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S の極限錐 $S\infty$ ([24]) とは次のように定義される錐である。

$$S\infty:=\{\lim_{n\to\infty}\epsilon_n y_n : y_n\in S, \|y_n\|\to\infty, \epsilon_n\to 0\}.$$

H を G の簡約な部分群とする。その Lie 代数を $\mathfrak{h}$ とし, $\mathfrak{k}$ における $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}$ の Killing 形式に関する直交補空間を $(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k})^\perp$ と書く。$\mathfrak{t}^*$ と $\mathfrak{t}$ も Killing 形式で同一視する。小林 (Ann. of Math., 1998) による離散的分岐則の判定条件を抽象的な形で書くと

定理 **2.4** **(離散的分岐則の判定条件)**. $G\supset H$ はともに簡約 *Lie* 群, $\pi\in\widehat{G}$ とする。

$$\mathrm{AS}_K(\pi)\cap\sqrt{-1}\,\mathrm{Ad}(K)(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k})^\perp=\{0\}$$

ならば, 分岐則 $\pi|_H$ は *H-admissible,* すなわち$\widehat{H}$ の可算直和 *(*有限重複度*)* として表される。

例 2.5. $H=K$ の場合は $\mathrm{Ad}(K)(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k})^\perp=\{0\}$ であるから, 定理 2.4 の条件は 任意の $\pi\in\widehat{G}$ に対して満たされる。この場合の定理 2.4 の結論は Harish-Chandra の定理 (例 2.2 (1)) に他ならない。

---

[5] $H=H_1H_2$ の形で, H_1 と H_2 は G において互いに他の中心化部分群となる簡約 Lie 部分群。

[6] 1980 年代後半頃まで多くの専門家の間では, 「H が非コンパクト, π が最高ウェイトを持たない」という一般的設定では, 分岐則 $\pi|_H$ が離散的になることはたとえあったとしても例外的な現象であり, まずそのような例が存在しないだろうと認識されていた。離散的分岐則の最初の非自明な例 (小林, 1988 [30]) は, 不連続群の問題 (§4.4) と関連して, $SU(2,2)\approx SO(4,2)$ の Gel'fand-Kirillov 次元 5 の離散系列表現を $Sp(1,1)\approx SO(4,1)$ に制限したときの分岐則 (重複度 1 かつ離散的に分解する) として得られた。またロシアでも独立に類似の例が発見されたようである。

例 2.6. $(G,H)=(U(2,2),Sp(1,1))\approx(SO(4,2),SO(4,1))$ の場合, $\widehat{G}$ の中で, regular かつ integral な無限小指標をもつ G の既約ユニタリ表現は 18 系列 (離散系列表現は 6 系列) あり, その内 12 系列 (離散系列表現は 2 系列) が, 連続スペクトラムのない離散的な分岐則をもつ。

具体的な表現 π に対して $\mathrm{AS}_K(\pi)$ を実際に計算することができる [51] 。定理 2.4 を具体的な例に適用する計算のコツについては, 例えば [48] 参照。また, 定理 2.4 の逆もほぼ成り立つ [58] 。定理の証明には, 連続スペクトラムの存在の有無を「表現の大きさ[7]」として, どのような概念によって評価するかがポイントになる。十分性 (定理 2.4) は指標を超局所的に捉え, その特異スペクトルを研究するという 1970 年代後半の 柏原-Vergne や Howe に始まるアイディアを発展させることにより証明できる。逆に必要性は, 無限次元表現の大きさを $\mathcal{D}$-加群的に捉えた不変量 (associated variety) に置き換えて評価し, さらに Harish-Chandra の $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$-加群の理論を無限次元表現の代数的直和 (離散的分解) に一般化してその基本的性質を調べることで証明できる。なお, Zuckerman 導来函手加群の場合には, 定理 2.4 の代数的な別証明もある [43] 。

§3. 離散的分岐則に関わる表現論の新しい展開

前節の定理 2.4 の判定条件によって, かなり多くのユニタリ表現の分岐則が離散的に既約分解することが判明した。こうして, 従来 扱われていなかった多くの分岐則の問題が, 種々の代数的手法を活用することによって研究することが可能になった。さらに, 離散的な分岐則の場合を深く研究することによって, 連続スペクトラムの存在する一般的な場合の分岐則に関する予想や手がかりが掴めることもある。

ここでは, ごく最近の結果の中からいくつかの題材をかいつまんで解説しよう。

3.1. Wallach の予想.

予想 **3.1** (Wallach). (G,G') を半単純対称対, $\pi\in\widehat{G}$ が G の離散系列表現ならば

$$\dim \mathrm{Hom}_{G'}(\tau,\pi|_{G'})<\infty \qquad (\forall\tau\in\widehat{G'}).$$

例えば, Harish-Chandra の基本定理 (例 2.2 (1)) は G' がコンパクトのときに上記の主張が正しい事を示している。然るに, G' がコンパクトならば $\pi|_{G'}$ は離散分解可能である。実は, $\pi|_{G'}$ が代数的に離散分解可能という仮定だけの下で (G' はコンパクトでなくともよい), Wallach の予想は成り立つ。 すなわち, つぎの定理が成り立つ。

定理 **3.2** (小林, [58]). $\pi\in\widehat{G}$ が離散系列表現とし, π_K をその *Harish-Chandra* 加群とする。

$$\dim \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}',K')}(\tau_{K'},\pi_K)<\infty \qquad (\forall\tau\in\widehat{G'})$$

となる。但し, $K'=K\cap G'$ は G' の極大コンパクト部分群, $\tau_{K'}$ は τ の *Harish-Chandra* 加群。特に, 制限 $\pi|_{G'}$ が離散分解可能ならば *Wallach* の予想が正しい。

なお, 連続スペクトラムに対する重複度は, (G,G') が半単純対称対であっても, 無限になる場合がある。すなわち, Wallach の予想の類似は成り立たない (cf. [43]) 。

また, 表現を幾何的に実現することにより, 定理 3.2 (Wallach の予想) から「連立系は holonomic ではなく, 局所解は無限次元になりうるが大域解が有限次元になる[8]」ような例をたくさん構成することができる。

---

[7]表現空間は無限次元の可分な Hilbert 空間であり, 位相線型空間としてはどれも同じである。しかし, 群の作用の観点もこめて考えれば, 無限次元表現の大きさを区別することができる。大きさを測るための概念の 1 つが Gel'fand-Kirillov 次元である。

[8]コンパクト多様体上の楕円型微分作用素に対する Atiyah-Singer の指数定理のように, このような大域解の次元と幾何的な性質とが何らかの結びつきをもつかも知れない。

3.2. Kostant-Schmid の公式と非コンパクト部分群への拡張.

次に 離散的な分岐則の明示公式の例として, Kostant-Schmid の公式の一般化を説明しよう。

G を Hermite 型の非コンパクト単純 Lie 群, すなわち $SU(p,q), SO(n,2), Sp(n,\mathbb{R}), SO^*(2n), E_{6(-14)}, E_{7(-25)}$ と局所同型な Lie 群とする。G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ と書き,

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$$

を $\mathrm{Ad}(K)$ の既約分解とする。$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{k}$ の極大可換部分代数とし, 正ルート $\Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ を固定する。G の既約最高ウェイト表現 (π, V) は, K-既約な表現 $V^{\mathfrak{p}^+} := \{v \in V^\infty : d\pi(X)v = 0 (\forall X \in \mathfrak{p}^+)\}$ によって分類される。そこで, K-表現 $V^{\mathfrak{p}^+}$ の最高ウェイトを $\mu \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ とするとき, (π, V) を $V^G(\mu)$ と表記しよう。この記法は他の同様の群にも使う。

また, $\dim V^{\mathfrak{p}^+} = 1$ のとき V をスカラー型とよぶ。最高ウェイト表現 V が $L^2(G)$ の閉部分空間に実現されるとき, V を正則離散系列表現 という。これは, 最も古くから研究されてきた離散系列表現である。なお, スカラー型の正則離散系列表現の coherent continuation[9]により任意の正則離散系列表現が得られる (Zuckerman, [106])。

さて, $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ が Hermite 対称空間 G/K に双正則変換群として作用するとしよう。τ あるいは その微分の固定点集合を右肩に τ をつけて表示する。例えば, $G^\tau = \{g \in G : \tau g = g\}$ である。G^τ の単位元の連結成分からなる簡約 Lie 群を G_0^τ と表す。$\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k\}$ を$\Delta((\mathfrak{p}^+)^{-\tau}, \mathfrak{t}^\tau)$ の極大な strongly orthogonal set とすると $k = \mathbb{R}\text{-}\mathrm{rank}\, G/G^\tau$ である (詳細は [55] 参照)。

定理 **3.3** (小林, 1997). G, τ, $\{\nu_j\}$ は上のとおりとし, $H := G_0^\tau$ とおく。(G, H) は半単純対称対である。G のスカラー型の正則離散系列表現 $V^G(\mu) \in \widehat{G}$ の H に関する分岐則は次の公式で与えられる。

$$V^G(\mu)|_H \simeq \sum_{\substack{a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 0 \\ a_j \in \mathbb{N}}}^{\oplus} V^H(\mu|_{\mathfrak{t}^\tau} + \sum_{j=1}^k a_j \nu_j). \tag{3.3.1}$$

上記の定理において, H が 非コンパクト群ならば, $V^H(*)$ は無限次元表現となる。

定理 3.3 は 次に述べる既知の結果を特別な場合として含む:

i) Hua-Kostant-Schmid の公式 (H が 極大コンパクト群 K に一致する場合。このときは $V^H(*)$ は有限次元である, [87])。
ii) $SU(2,2)$ など低次元の特別な計算例 (Jakobsen, Vergne など, [23])。

3.3. ユニポテント表現と離散的分岐則.

metaplectic 群 $G = \widetilde{Sp}(n, \mathbb{R})$ の Segal-Shale-Weil 表現 π の reductive dual pair に関する分岐則は Howe 対応として, 古くからさまざまな動機から研究されてきた。π は C 型の split 群 G のユニポテント表現である。1990 年代に入ってから, 他の群のユニポテント表現に対しても, reductive dual pair に関する分岐則が研究されはじめた。例えば $\mathbb{R}$ 上の代数群では次の結果が知られている。

i) G が実ランク 4 の例外群, Gross-Wallach (1994) (離散的分岐則の場合),
ii) G が E 型, J-S. Li (1996) (離散的分岐則の場合),
iii) G が D 型, 小林-Ørsted (1991 (離散的分岐則の場合); 1997(一般の場合))。

(i), (ii) は Zuckerman 導来函手加群の性質を用いた代数的手法で, (iii) は conformal geometry における山辺作用素を用いた幾何的手法でそれぞれ離散スペクトラムを求めた結果である。

[9]表現のパラメータに関する格子点上の「解析接続」に相当する。

§4. 離散的分岐則と周辺分野との関わり

4.1. 分岐則と幾何.

ユニタリ表現の分岐則は, 従来より 量子力学における対称性の破れの記述や 保型形式におけるθ-lift など他の分野の研究からの動機によって, その発展が促進されてきた。この節では, ユニタリ表現の分岐則と周辺分野の間に, 1990 年代に見いだされた新しい関わり合いについて述べたい。その基本的な考え方 ([43]) を標語的に述べるならば

「表現が一つの対象 (object) を記述するのに役立つとすれば,
表現の分岐則はその射 (morphism) を記述するのに役立つ」

ということである。すなわち,

$$\begin{array}{ccc} X\text{の幾何} & \Leftrightarrow & \text{函数空間 } \Gamma(X) \\ \text{写像 } f: Y \to X & \Leftrightarrow & \text{引き戻し } f^*: \Gamma(X) \to \Gamma(Y) \end{array}$$

において群が作用している状況を考える。正確にいうと, G' を G の部分群とし, X には群 G が作用し, Y には群 G' が作用し, f は G'-同変と仮定すると

$$\begin{array}{rcl} G\text{ の作用する空間 }X\text{の幾何} & \Leftrightarrow & G\text{ の表現 } \Gamma(X) \\ G'\text{-同変な写像 } f: Y \to X & \Leftrightarrow & G\text{ の表現 } \Gamma(X) \text{ の } G'\text{への制限 (分岐則)} \\ & & + G'\text{-intertwining map } f^*: \Gamma(X) \to \Gamma(Y) \end{array}$$

という見方ができる。そこで, G の表現を G' に制限したときの様子 (分岐則) が詳しくわかっていれば, 引き戻し写像 f^* を表現論的に理解することができ, もとの写像 f 自身の理解の助けになると期待できる。

この原理[10]において, 表現論における離散的分岐則が 他の分野に翻訳されたとき何を意味するのか, また 離散的分岐則の判定条件 (§3) が どのような設定において研究の手法 (道具) として役に立つのか, その典型的な例を述べてみる。

4.2. 局所リーマン対称空間の modular symbol の消滅型定理.

大雑把にいうと, modular symbol とは, 局所 Riemann 対称空間 (例えば 種数 2 以上の閉 Riemann 面) において 群論的に定義されたサイクルの定めるホモロジー類のことである。次の設定を考える。

$G' \subset G$: 共に実線型簡約 Lie 群,

$K' \subset K$: それぞれ $G' \subset G$ の極大コンパクト部分群,

$\Gamma' \subset \Gamma$: それぞれ $G' \subset G$ の余コンパクトな, 捻れ元のない離散部分群

とするとき, コンパクトな局所 Riemann 対称空間の自然な写像

$$\iota : Y := \Gamma' \backslash G'/K' \to X := \Gamma \backslash G/K$$

が得られる。ι の像は Riemann 多様体 X の全測地的部分多様体となる。$\dim Y = m$ とするとき, ι が誘導する ホモロジー群の準同型写像

$$\iota_* : H_m(Y;\mathbb{Z}) \to H_m(X;\mathbb{Z})$$

による基本類 $[Y] \in H_m(Y;\mathbb{Z})$ の像 $\iota_*[Y] \in H_m(X;\mathbb{Z})$ を <u>modular symbol</u> と呼ぶ (cf. [2])。modular symbol を記述することは一般に非常に困難な問題である。

---

[10] もちろん, アイディアを明確にするため, 状況を最大限簡単にして説明している。

さて,

$$(G, G') = (SO_0(2n,2), SO_0(2n,1))$$

の場合, コンパクト部分多様体 Y の像 $\iota(Y)$ が定める modular symbol は IV 型有界対称領域の Clifford-Klein 形

$$X = \Gamma\backslash SO_0(2n,2)/(SO(2n)\times SO(2))$$

の $2n$ 次のホモロジー群の元となる。X はコンパクトな Kähler 多様体なので, Poincaré の双対定理を通じて modular symbol をコホモロジー群 $H^{2n}(X;\mathbb{C})$ の元とみなしたとき, その (p,q)-型の Hodge 成分 $\mathcal{M}^{p,q}(Y) \in H^{p,q}(X;\mathbb{C})$ を考えることができる。織田孝幸氏は, 保型形式の立場から, (n,n)-型 Hodge 成分 $\mathcal{M}^{n,n}(Y)$ の消滅定理を予想されていた。その予想は, 表現論の結果 (定理 2.4 の離散分解可能の判定条件が主な道具) を用いて, 肯定的に解決された:

定理 **4.1** ([59]). ある普遍コホモロジー元[11] η があって,

$$\mathcal{M}^{n,n}(Y) = \frac{\mathrm{vol}(Y)}{\mathrm{vol}(X)}\,\eta.$$

なお, 他の Hodge 成分についても 真ん中に近づくほど強い制約が定理 2.4 から与えられる。定理 4.1 は, 一般の半単純対称対 (G, G') に対する modular symbol の消滅型定理 ([59]) の具体的な計算を実行することによって証明される。その鍵となるのはユニタリ表現の **離散的な分岐則の判定条件** (定理 2.4) である。なぜ, 離散性が重要な役割を果たすのかは, 他の類似の理論の原型[12]における状況と比較するとわかりやすいであろう (下の図式の詳しい解説は[48] 参照; 整数論の観点からは[80] 参照) 。

スペクトルの離散性	$\Rightarrow$	幾何 $\Leftrightarrow$ 函数空間 (表現)
X: コンパクト Riemann 多様体 Laplacian Δ_X は $L^2(X)$ において 離散スペクトラムのみをもつ	$\Rightarrow$	Hodge 理論 X のトポロジー $\Leftrightarrow$ 調和形式
		$\Downarrow$ 精密化
$L^2(\Gamma\backslash G)$ は $\widehat{G}$ の離散直和に分解する (Gel'fand-Piateski-Shapiro, [13])	$\Rightarrow$	松島-村上の公式, [7], [73] ('60 年代前半)
		$\Downarrow$ (対象 $\Rightarrow$ 射)
ユニタリ表現の分岐則の 離散分解の判定条件 (小林, [51])	$\Rightarrow$	modular symbol の消滅型定理 (織田-小林, [48],[59],[80])

なお, 松島-村上の公式とは 1 つの局所 Riemann 対称空間のトポロジー, 織田-小林の消滅定理は 2 つの局所 Riemann 対称空間の間の写像に関するトポロジーをそれぞれ表現論的に記述した定理である。

4.3. 非可換調和解析への応用—新しい離散系列表現の構成.

等質多様体 G/H に G-不変な測度が存在しているとき, Hilbert 空間 $L^2(G/H)$ に G が自然にユニタリ表現として作用する。$\pi \in \widehat{G}$ が $L^2(G/H)$ の閉部分空間に実現される, すなわち

[11] Lie 代数の元で明確に与えられ, Γ に依存しない, コホモロジー類。

[12] ひとたび 理論の原型ができれば, 今度は連続スペクトラムが存在する場合に, どのような形で拡張できるかを調べることは意味があるだろう。

$\mathrm{Hom}_G(\pi, L^2(G/H)) \neq 0$ のとき, π を G/H の離散系列表現という。離散系列表現は $L^2(G/H)$ の既約分解における点スペクトラムに相当する。

離散系列表現は無限次元表現論が躍動する場の一つである。1947 年に Bargmann が $SL(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現を発見した。Bargmann 以前の様子が想起されるものとして, Weil が 1978 に昔の著作を振り返った自注 ([103]) を引用してみよう: 「(“位相群上の積分とその応用” を 1940 年に著したとき) 私は約束の地である無限次元表現に到達しなかっただけでなく, それを垣間みることさえないままに終わってしまった。私はコンパクトでない単純 Lie 群の有限次元表現の行列要素が自乗可積分でないことを知って失望したがこれは早合点だった」(下線部: 筆者)。

離散系列表現は, それ自体 非可換調和解析の重要な研究対象であるが, 次のような方面の問題との関係も明らかになりつつある。

(1) 連続系列表現の構成 (既知の例では, 連続スペクトラムに寄与する表現は, 小さい空間の離散系列表現からの通常の尖点放物型誘導で得られる)。
(2) 局所 Riemann 対称空間のトポロジー (modular symbol の非消滅定理) (Y. L. Tong - S. P. Wang, 1989, [94])。
(3) 積分幾何における L^p-Pompeiu 変換での障害; 単連結可解 Lie 群 (Carey-Kaniuth-Moran 1991, [9]); $SL(2,\mathbb{R})$ (Sitaram 1984, [91]); 一般の簡約 Lie 群およびその等質空間 (小林 1991, [52] Theorem 1.2.17)。
(4) 特に 孤立している既約ユニタリ表現の研究 (例えば, Schlichtkrull [85])。

離散系列表現についての現状: 「簡約 Lie 群の等質多様体にいつ離散系列表現が存在するか?」という基本問題は, 現在未解決である。知られている場合を列挙すると:

i) 半単純 Lie 群の場合 (離散系列表現の分類は Harish-Chandra, 幾何的構成については Langlands, 岡本清郷, Schmid, 堀田良之, Atiyah-Schmid, Flensted-Jensen など, 代数的構成については Enright, Zuckerman, Vogan など),
ii) 半単純対称空間の場合[13](Flensted-Jensen, 松木-大島; 1980 年代前半; [12], [72]),
iii) 半単純対称空間上のベクトル束値の場合 (Schlichtkrull, 小林, J-S.Li, 示野; 1980 年代-1990 年代初頭; [34], [66], [86], [90]),
iv) 非対称な球等質空間[14](主な系列) の場合 (宇沢, 小林, Huang, 1989-; [22], [43]);
v) 簡約型等質多様体の場合 (2 つの involution による軌道) (小林, 1998; [49], [53])

注意. 1) (i) $\subsetneqq$ (ii) $\subsetneqq$ (iii) を同時に扱った概説記事としては [39] 参照。
2) (iv) は (ii) に較べてやや広いクラスであり, (v) は (ii) に較べて非常に広い。
3) 対称空間に実現される離散系列表現は, 現在の代数的表現論からは比較的素直な表現 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ (λ は fair range) として表される。一方, (iv) や (v) の離散系列表現は, 代数的にも特異なものが現れるという点で難しくかつ面白い。
4) (iv) の多くの場合, 離散系列表現の分類は, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)|_{G'}$ の分岐則における離散スペクトラムの決定と同値であることが証明される。
5) (v) に関連した軌道分解に関しては飯田, 松木の最近の研究 (1992 ～) がある ([70], [71])。

典型例: (ii)～(v) で述べた等質多様体の典型例を一つずつ挙げておこう。
(ii) では $SL(n,\mathbb{R})/SO(p,n-p)$,
(iii) では $O(p,q)/O(r,q) \quad (0<r<p)$,
(iv) では $SU(n,n+1)/Sp(n,\mathbb{R})$,
(v) では $Sp(2n,\mathbb{R})/(Sp(n_0,\mathbb{C}) \times GL(n_1,\mathbb{C}) \times \cdots \times GL(n_k,\mathbb{C}))$, $(\sum n_j = n)$.
なお, 上の (v) の例では, $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 0$ となることが対称空間となるための必要十分条件である。

離散的分岐則との関わり: 簡約 Lie 群の群多様体や半単純対称空間の調和解析はそれ自身一つの閉じた世界という側面があり, そこで成功した手法 (例えば Flensted-Jensen 双対) はもっと

[13] Berger によって 局所的に分類された (1957)。
[14] コンパクト形は Krämer(1976), Brion(1987) によって分類された。

一般の等質多様体に拡張できないことが多い。従って, より一般の等質多様体を扱うには新しい手法が必要となる。(iv), (v) における主要な構成手法は, 無限次元表現の分岐則である。特に, (v) では **離散的な分岐則**が重要な役割をはたす。そのアイディアを3つのステップにわけると,

イ) 研究したい空間 G/H を (既知の) 空間 $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ に埋め込み ($\iota : G/H \hookrightarrow \widetilde{G}/\widetilde{H}$), 函数の引き戻し写像 (実際には, 法線方向の微分も有限回 施したものも考える) を考える:

$$\iota^* : C^\infty(\widetilde{G}/\widetilde{H}) \to C^\infty(G/H), f \mapsto f \circ \iota.$$

ロ) 制限した函数 $\iota^* f$ を G の既約成分に展開し, 離散スペクトラム $\lambda \in \widehat{G}$ への射影成分 $(\iota^* f)_\lambda$ の (無限遠での) 漸近挙動を部分多様体 G/H に沿って評価する ([53])。

ハ) G/H の測度公式を与え, G/H と $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ の測度の無限遠での漸近挙動を比較する ([50])。

ι の像が通常の軌道 (正確には Richardson の意味で principal type orbit) であるならば, Step (ロ) と (ハ) の評価は不要である。(この場合は, 分岐則において連続スペクトラムが存在しても上の議論は成り立つ; [41], [43], [67])。言い換えると, Step (ロ) と (ハ) は ι の像が特異な軌道である一般の場合のためのアイディアである。Step (ロ) において, $(\iota^* f)_\lambda$ と与えられた函数 f との間の漸近挙動の間の理想的な関係を保証するのが, $\widetilde{G}$ から G への制限に関して ユニタリ表現の分岐則が離散的であるという条件なのである ([53])。このとき, f を $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ 上の然るべき球函数とすると, $(\iota^* f)_\lambda$ が G/H 上の離散系列表現を生成することが証明される。

既にこの項で多くの紙面を割いたため, (iv) や (v) の正確な定式化や具体例は, 文献[43], [49], [53] に譲る。なお, 上記の手法は, 非対称な等質多様体上の解析のみならず, 研究の歴史が長い半単純対称空間上の調和解析に対しても新しい観点を与える。例えば, 次のような幾何的な結果が (従来の対称空間に関する結果を用いずに) **離散分岐理論**の系として証明することができる:

定理 4.2. 非コンパクト半単純対称空間 G/H に正則離散系列表現が存在するための必要十分条件は, $H/H \cap K$ が複素多様体 G/K の実形であることである。

例 4.3. $G/H = SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})/\operatorname{diag}(SL(2,\mathbb{R}))$ の場合, 単位円板を $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ と書くと, 自然な埋め込み $H/H \cap K \hookrightarrow G/K$ は

$$D \hookrightarrow D \times D,\ z \mapsto (z, \bar{z})$$

で与えられる。特に, $H/H \cap K$ は G/K の実形である。この幾何的な条件は, 定理 4.2 において 群多様体 $G/H \simeq SL(2,\mathbb{R})$ に正則離散系列表現が存在することに対応する。

なお, 定理 4.2 の十分性には 'Olafsson-Ørsted [81] による別証明も知られている。

このように構成された離散系列表現が, 例えば 局所 Riemann 対称空間のサイクルの構成にどのように役立つかという応用を調べるのは今後の課題の 1 つであろう。

4.4. 不連続群論との関わり合い.

$U(V)$ を Hilbert 空間 V のユニタリ作用素全体からなる群とし, G の既約ユニタリ表現 $\pi : G \to U(V)$ を考える。G の部分群 G' への制限 $\pi|_{G'}$ は 次の準同型写像の合成に他ならない:

$$G' \subset G \xrightarrow{\pi} U(V)$$

制限 $\pi|_{G'}$ が離散的に分解するという条件は,
「無限次元の群 $U(V)$ において, Lie 群 G' の像があたかもコンパクト群のように振る舞う」という性質を示していると考えられる。

一方, M を多様体とし, Lie 群 Γ は M に作用しているという設定を考えよう。M の各コンパクト集合 S に対して, $\Gamma_S := \{\gamma \in \Gamma : \gamma \cdot S \cap S \neq \emptyset\}$ がコンパクトであるとき, Γ の M への作用が固有 (proper)であるという。さらに, 離散群の固有な作用を固有不連続 (properly discontinuous) と呼ぶ。例えば, 基本群の普遍被覆空間への被覆変換 (covering transformation) は固有不連続

な作用の例である。逆に, 捻れ元のない離散群 Γ が多様体 M に固有不連続にするならば, Γ-軌道の空間 $\Gamma\backslash M$ には自然に多様体の構造が入り, 商写像 $M \to \Gamma\backslash M$ は被覆写像となる。さて, Γ の M への作用は, Γ から M の微分同相写像全体からなる群 $\mathrm{Diffeo}(M)$ への準同型写像

$$\Gamma \to \mathrm{Diffeo}(M)$$

として表される。作用が固有不連続という条件は, 荒っぽく言えば
「無限次元の群 $\mathrm{Diffeo}(M)$ において, 離散群 Γ の像があたかもコンパクト群のように振る舞う」という性質である。

このように並べて書くと, 次のような疑問が浮かぶかも知れない。
「Lie 群のユニタリ表現の分岐則の離散性と離散群の作用の固有不連続性との間になんらかの関係があるのだろうか?」特に, L が G の閉部分群であり, 等質空間 G/L を M とするとき, G の Mへの左作用を通じて離散部分群 Γ も M に作用する:

$$\Gamma \subset G \to \mathrm{Diffeo}(G/L).$$

まずは, 判定条件の比較を行おう。
判定条件の比較—スペクトラムの離散性と固有不連続な作用:
i) 定理 2.4 で与えた 分岐則のスペクトラムの離散性の判定条件は

$$\{\text{ 群 } H \text{ から定まる部分集合 }\} \cap \{\text{ 表現 } \pi \text{ から定まる錐 }\} = \{0\}$$

という形をしていた。一方,
ii) 簡約 Lie 群 H の等質多様体 G/L への自然な作用が固有 (proper) であるための必要十分条件 (小林 Math. Ann. 1989) は, 有限群 (Weyl 群) の作用を法として

$$\{\text{ 群 } H \text{から定まる部分線型空間 }\} \cap \{\text{ 群 } L \text{ から定まる部分線型空間 }\} = \{0\}$$

という形で与えられる。
iii) 離散群 Γ の等質多様体 G/L への自然な作用が固有不連続 (properly discontinuous) であるための必要十分条件は有限群 (Weyl 群) の作用を法として

$$\{\text{ 群 } \Gamma \text{ から定まる部分集合 }\} \cap \{\text{ 群 } L \text{ から定まる管 }\} = \text{相対コンパクト}$$

という形で与えられる (この判定条件は (ii) の定式化をもとにした一般化であり, Benoist (Ann. Math. 1996) と 小林 (J. Lie Theory 1996) によって独立に異なる手法で証明された)。
離散群の作用とユニタリ表現の分岐則: 前項の (i) は解析的な表現論 (スペクトラムの離散性) の問題であり, 一方 (ii) と (iii) はトポロジーの問題 (固有不連続性) である。両者の目的意識や証明に使われた道具は全く異なる。しかし, 上記の諸定理の不思議な類似性は, 次の図式

離散 version:	離散群の properly discontinuous な作用
	$\downarrow\uparrow$
連続 version:	連結 Lie 群の proper な作用
	$\downarrow\uparrow$
表現論 version:	連結 Lie 群のユニタリ表現の離散的分解

が互いに類似の概念を与えているという philosophy を示唆するものと考えられる。

すなわち, 有限群の作用は常に固有不連続であるが, 無限群であっても例えば 多様体の基本群が普遍被覆空間に被覆変換として作用するときのように固有不連続に作用することがしばし

ばある。これと同じように, コンパクト群に関する分岐則はつねに離散的であるが, 非コンパクト群であっても 分岐則が離散的になることがしばしば起こりうるのである。

実際, 定理 2.4 の出発点となった離散的な分岐則の非自明な例は, 上の図式が指導原理となって, 次のようにして構成された ([30]):

i) まず, 半単純対称空間 G/L の一様格子[15] Γ を構成する (cf. [29]).

ii) Γ の G における Zariski 閉包を G' とおく.

iii) G/L の離散系列表現 $\pi \in \widehat{G}$ を一つ選ぶ (cf. [12]).

iv) このとき, ユニタリ表現 π の制限 $\pi|_{G'}$ の分岐則を考えよ.

最も簡単な例は, $G/L = SU(2,2)/U(2,1)$ ($P^3\mathbb{C}$ の開集合), $G' = Sp(1,1)$, π は Gel'fand-Kirillov 次元 5 の離散系列表現の場合で, このとき $\pi|_{G'}$ の分岐則は離散的になる (§2.1 の脚注参照)。この例は, 単連結多様体 $M := S^2 \times \mathbb{R}^4$ には, 次のような Riemann 計量 g が存在することの表現論的裏付けでもある: (M, g) は コンパクト Riemann 多様体の被覆であって, しかも Laplacian の点スペクトラムが存在する (cf. 砂田利一氏の問題 [77],[31]) 。

「擬 Riemann 等質多様体に 一様格子が存在するか？」という問題は, 筆者や小野薫氏が一般論を志した論文 (1989)[29], [33] 以降, Benoist, Corllette, Kobayashi, Labourie, Zimmer, Margulis, Oh, Witte 等により, Lie 群の構造, 離散群のコホモロジー群, 特性類, シンプレクティック幾何, エルゴード理論, ユニタリ表現論の制限などのさまざまなアプローチから現在盛んに研究されている ([4], [5], [35], [36], [38], [45], [47], [56], [69], [78], [105]) 。これらについての紹介は別の機会に譲ることにしたい。なお, Margulis(1998) の手法は, ユニタリ表現の制限に付随する行列要素の無限遠における漸近挙動の評価に基づいており, ユニタリ表現の分岐則と不連続群についての新しい関わり合いを見いだした点で興味深く思われる。

前ページの図式において, 最後の $\downarrow\uparrow$ は, philosophical なものであって, 今のところ指導原理を与えているに過ぎない。固有不連続性と離散的分岐則の間のいくつかの不思議な関係を説明する内在的な理由があるのかという疑問を含め, まだまだ未知の世界が広がっているように感じる。

References

[1] J. Adams, *Discrete spectrum of the dual reductive pair* $(O(p,q), Sp(2m))$, Inv.Math. **74** (1984), 449–475.

[2] A. Ash and A. Borel, *Generalized modular symbols*, Cohomology of arithmetic groups and automorphic forms, Lecture Notes in Math., vol. 1447, Springer, 1990, pp. 57-76.

[3] A. Beilinson and J. Bernstein, *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules*, C. R. A. S. Paris (1981), 15–18.

[4] Y. Benoist, *Actions propres sur les espaces homogenes reductifs*, Ann. of Math. (1996).

[5] Y. Benoist and F. Labourie, *Sur les espaces homogenes modeles de varietes compactes*, I. H. E. S. Publ. Math. (1992), 99–109.

[6] A. Borel, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111-122.

[7] A. Borel and N. Wallach, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups*, Ann. Math. Stud. **94**, Princeton U.P., 1980.

[8] E. Calabi and L. Markus, *Relativistic space forms*, Ann. of Math. **75** (1962), 63–76.

[9] A. L. Carey, E. Kaniuth and W. Moran, *The Pompeiu problem for groups*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **109** (1991), 45-58.

[10] P. Delorme, *Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs*, Ann. of Math. (1998).

[11] T. Enright, R. Howe and N. Wallach, *A classification of unitary highest weight modules*, Representation theory of reductive groups, Progress in Math., vol. 40, Birkhäuser, 1983, pp. 97–143.

[12] M. Flensted-Jensen, *Discrete series for semisimple symmetric spaces*, Ann. of Math. **111** (1980), 253–311.

[15] Borel, Harish-Chandra, Mostow-玉河らによる Riemann 対称空間に対する一様格子の存在定理 ([6]) とは対照的に, 非 Riemann 等質多様体 (例えば, 半単純対称空間) には Calabi-Markus 現象 (1962, [8]) などが起こることもあり, 一様格子が存在するとは限らない。非 Riemann 等質多様体の不連続群に関する最近の進展についての入門的解説として European School の講義録 [47] がある。

[13] I. M. Gel'fand, M. I. Graev and I. Piateski-Shapiro, *Representation Theory and Automorphic Functions*, Saunders Math. Books, 1969.

[14] B. H. Gross and N. R. Wallach, *A distinguished family of unitary representations for the exceptional groups of real rank* = 4, Lie Theory and Geometry, In honor of Bertram Kostant, Progress in Math., vol. 123, Birkhäuser, 1994, pp. 289–304.

[15] Harish-Chandra, *Representations of semi-simple Lie groups*, I, III, Trans. A. M. S. **75**, (1953), 185–243; **76**, (1954), 234–253; IV, Amer. J. Math. **77**, (1955), 743–777.

[16] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups*, I, J. Funct. Anal., **19**, (1975), 104–204; II, Invent. Math., **36**, (1976), 1–55; III, Ann. of Math., **104**, (1976), 117–201.

[17] H. Hecht and W. Schmid, *A proof of Blattner's conjecture*, Invent. Math. **31** (1976), 129–154.

[18] S. Helgason, *A duality for symmetric spaces with applications to group representations* I, II, Adv. in Math. **5**, (1970), 1–154; **22**, (1976), 187–219.

[19] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Pure and Appl. Math., vol. 80, Academic Press, 1978, ISSN 0-12-338460-5.

[20] 堀田良之, 対称空間上の楕円複体, 数学 **22** (1970), 204-216.

[21] R. Howe, *θ-series and invariant theory*, Proc. Symp. Pure Math. **33** (1979), Amer. Math. Soc., 275–285.

[22] J-S. Huang, *Harmonic analysis on compact polar homogeneous spaces.*, Pacific J. Math. **175** (1996), 553—569.

[23] H. P. Jakobsen and M. Vergne, *Restrictions and expansions of holomorphic representations*, J. Funct. Anal. **34** (1979), 29–53.

[24] M. Kashiwara, T. Kawai and T. Kimura, *Foundations of Algebraic Analysis*, Princeton Math. Series, vol. 37, Princeton Univ. Press, 1986.

[25] M. Kashiwara and M. Vergne, *On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials*, Invent. Math. **44** (1978), 1–47.

[26] M. Kashiwara and M. Vergne, *K-types and singular spectrum*, Lect. Notes. in Math., vol. 728, Springer, 1979, pp. 177–200.

[27] A. Knapp and D. Vogan, *Cohomological Induction and Unitary Representations*, Princeton U.P., 1995.

[28] A. Knapp and G. J. Zuckerman, *Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups*, Ann. of Math. **116** (1982), 381–501.

[29] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), 249–263.

[30] T. Kobayashi, *Unitary representations realized in L^2-sections of vector bundles over semi-simple symmetric spaces*, Proceedings at the 27-28 th. Symp. of Functional Analysis and Real Analysis (in Japanese) (1989), Math. Soc. Japan, 39–54.

[31] T. Kobayashi, K. Ono and T. Sunada, *Periodic Schrödinger operators on a manifold*, Forum Mathematicum **1** (1989), 69–79.

[32] T. Kobayashi, *Asymptotic behaviours of the null variety for a convex domain in a non-positively curved space form*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **36** (1989), 389–478.

[33] T. Kobayashi and K. Ono, *Note on Hirzebruch's proportionality principle*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **37-1** (1990), 71–87.

[34] T. Kobayashi, *Singular Unitary Representations and Discrete Series for Indefinite Stiefel Manifolds* $U(p,q;\mathbb{F})/U(p-m,q;\mathbb{F})$, vol. 462, Memoirs of Amer. Math. Soc., 1992, (106 pages).

[35] T. Kobayashi, *A necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of reductive type*, Duke Math. J. **67** (1992), 653–664.

[36] T. Kobayashi, *Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type*, Proc. of ICM-90 Satellite Conference at Fuji-Kawaguchiko, World Scientific, 1992, pp. 59–75.

[37] T. Kobayashi, *Perturbations of domains in the Pompeiu problem*, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), 29–55.

[38] T. Kobayashi, *On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with non-compact isotropy subgroups*, J. Geom. Physics **12** (1993), 133–144.

[39] T. Kobayashi, 簡約型等質多様体上の調和解析と表現論, 数学「論説」**46** (1994), 124–143.

[40] T. Kobayashi, *Bounded domains and the zero sets of Fourier transforms*, 75 Years of Radon Transforms (S. Gindikin, P. Michor, ed.), Conference Proceedings and Lecture Notes in Mathematical Physics, vol. IV, International Press, 1994, pp. 223–239.

[41] T. Kobayashi, *The Restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ to reductive subgroups.* I, II, Proc. Japan Acad. **69** (1993), 262-267; **71** (1995) 24-26.

[42] T. Kobayashi, 曲面の積分幾何と複素等質空間の Plancherel 型定理, 表現論シンポジウム (1994), 16–25.

[43] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications*, Invent. Math. **117** (1994), 181–205.

[44] T. Kobayashi, 球等質多様体上の調和解析入門, 第３回整数論サマースクール「等質空間と保型形式」(佐藤文広, ed.), 1995, pp. 22–41.

[45] T. Kobayashi, *Criterion of proper actions on homogeneous space of reductive groups*, J. Lie Theory **6** (1996), 147–163.

[46] T. Kobayashi, ユニタリ表現の制限とその応用について, 表現論シンポジウム講演集 (三河ハイツ, November 19–22, 1996) (1996), 131–141.

[47] T. Kobayashi, *Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, Algebraic and Analytic Methods in Representation Theory (H. Schlichtkrull and B. Ørsted, ed.), Perspectives in Mathematics **17**, Academic Press, 1996 ISBN 0-12-625440-0, pp. 99–165.

[48] T. Kobayashi, 局所対称空間のモジュラー記号の消滅定理 (石川 哲 記),「表現論とその周辺」報告集, (倉敷 1996 Nov.) (示野信一, ed.), 1996, pp. 1–16, http://www.merry.xmath.ous.ac.jp/math/Nov5th1996.html.

[49] T. Kobayashi, *L^p-analysis on homogeneous manifolds of reductive type and representation theory*, Proc. Japan Acad. **73** (1997), 62–66.

[50] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. reine und angew. Math. **490** (1997), 37–53.

[51] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups* II — *micro-local analysis and asymptotic K-support*, Annals of Math. **147** (1998), 709–729.

[52] T. Kobayashi, *Convex domains and Fourier transform on spaces of constant curvature*, Travaux en Cours (P. Torasso, ed.), Hermann, Paris, 112 pages (to appear).

[53] T. Kobayashi, *Discrete series representations for the orbit spaces arising from two involutions of real reductive Lie groups*, J. Funct. Anal. **152** (1998), 100–135.

[54] T. Kobayashi, *Monastir Seminar on the restriction of unitary representations and their applications*, Proc. of the CIMPA School (Tunisia, 1996) (P. Torasso, ed.), 1997.

[55] T. Kobayashi, *Multiplicity free theorem in branching problems of unitary highest weight modules*, 表現論シンポジウム報告集, 佐賀県波戸岬 (三町勝久, ed.), 1997, pp. 7–13.

[56] T. Kobayashi, *Deformation of compact Clifford-Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds*, Math. Ann. **310** (1998), 394–408.

[57] T. Kobayashi, *Harmonic analysis on homogeneous manifolds of reductive type and unitary representation theory*, Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants (K. Nomizu, ed.), vol. 183, Amer. Math. Soc., 1998, pp. 1–31.

[58] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups* III — *restriction of Harish-Chandra modules and associated varieties*, Invent. Math. **131** (1998), 229–256.

[59] T. Kobayashi and T. Oda, *Vanishing theorem of modular symbols on locally symmetric spaces*, Comment. Math. Helvetici **73** (1998), 45–70.

[60] T. Kobayashi and B. Ørsted, *Conformal geometry and branching laws for unitary representations attached to minimal nilpotent orbits*, C. R. Acad. Sci. Paris **326** (1998), 925–930.

[61] 小林俊行-大島利雄, Lie 群と Lie 環 I, II (620 pages), 岩波書店, 1999.

[62] T. Kobayashi, *Restriction of unitary representations of reductive Lie groups*, preprint.

[63] T. Kobayashi, *Multiplicity-free theorem in branching problems of unitary highest weight modules*, preprint.

[64] B. Kostant, *The vanishing scalar curvature and the minimal unitary representation of $SO(4,4)$*, Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory (Connes et al, eds.), vol. 92, Birkhäuser, 1990, pp. 85–124.

[65] R. Langlands, *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, mimeographed notes (1973).

[66] J-S. Li, *On the discrete series of generalized Stiefel manifolds*, Trans. A. M. S. **340** (1993), 753–766.

[67] J-S. Li, *Two reductive dual pairs in groups of type E*, Manuscripta Math. **91** (1996), 163–177.

[68] G. W. Mackey, *Induced representations of locally compact groups* I, Ann. of Math. **55** (1952), 101–139.

[69] G. Margulis, *Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients*, Bul. Soc. math. France **125** (1997), 1–10.

[70] T. Matsuki, *Double coset decompositions of algebraic groups arising from two involutions* I, J. Algebra **175** (1995), 865–925.

[71] T. Matsuki, *Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions*, J. Algebra **197** (1997), 49–91.

[72] T. Matsuki and T. Oshima, *A description of discrete series for semisimple symmetric spaces*, Advanced Studies in Pure Math. **4** (1984), 331–390.

[73] Y. Matsushima and S. Murakami, *On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric spaces*, Ann. of Math. **78** (1963), 365-416.

[74] H. Matumoto, *On the representations of $U(m,n)$ unitarily induced from derived functor modules*, Composition Math. **100** (1996), 1-39.

[75] Y. A. Neretin and G. I. Ol'shanskii, *Boundary values of holomorphic functions, special unitary representations of $O(p,q)$, and their limits*, Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI **223** (1995), 9–91.

[76] H. Ochiai, *Characters and character cycles*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 583–598.

[77] 落合卓四郎, リーマン多様体上のラプラシアンのスペクトラムについて, 数学 **39** (1987), 日本数学会, 237–242.

[78] H. Oh and D. Witte, *Compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of $SO(2,n)$*, preprint (1999).

[79] 岡本清郷, *Borel-Weil* 理論について, 数学 **23** (1971), 日本数学会, 34–44.

[80] 織田孝幸, 保型形式のための実解析, 数学 **50-4** (1998), 日本数学会, 350–357.

[81] G. Ólafsson and B. Ørsted, *The holomorphic discrete series of an affine symmetric space*, I, J. Funct. Anal. **81** (1988), 126–159.

[82] 大島利雄, 半単純対称空間上の調和解析, 数学 **37** (1985), 日本数学会.

[83] R. S. Palais, *On the existence of slices for actions of noncompact Lie groups*, Ann. of Math. **73** (1961), 295–323.

[84] F. Peter and H. Weyl, *Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe*, Math. Ann. **97** (1927), 737–755.

[85] H. Schlichtkrull, *The Langlands parameters of Flensted-Jensen's discrete series for semisimple symmetric spaces*, J. Funct. Anal. **50** (1983), 133–150.

[86] H. Schlichtkrull, *A series of unitary irreducible representations induced from a symmetric subgroup of a semisimple Lie group*, Invent. Math. **68** (1982), 497–516.

[87] W. Schmid, *Die Randwerte holomorphe Funktionen auf hermetisch symmetrischen Raumen*, Invent. Math. **9** (1969-70), 61–80.

[88] H. Sekiguchi, *The Penrose Transform for certain non-compact homogeneous manifolds of $U(n,n)$*, ph. D. dissertation, Univ. of Tokyo, 1995 January; published in J. Math. Sci. Univ. Tokyo **3** (1996), 655–697.

[89] J.-P. Serre, *Représentations linéaires et espaces homogènes Kählérians des groupes de Lie*, Exposé 100, Séminaire Bourbaki, 6^e année (1953/54), Inst. Henri Poincaré, Paris.

[90] N. Shimeno, *The Plancherel formula for spherical functions with a one-dimensional K-type on a simply connected simple Lie group of Hermitian type*, J. Funct. Anal. **121** (1994) 330–388.

[91] A. Sitaram, *Some remarks on measures on noncompact semisimple Lie groups*, Pacific J. Math. **110** (1984), 429–434.

[92] T. Tanisaki, *Hypergeometric systems and Radon transforms for Hermitian symmetric spaces*, preprint.

[93] 辰馬信彦, 位相群の双対定理, vol. 32, 紀伊国屋叢書, 1994, ISBN 4-314-00683-8.

[94] Y. L. Tong and S. P. Wang, *Geometric realization of discrete series for semisimple symmetric spaces*, Invent. Math. **96-2** (1989), 425–458.

[95] D. A. Vogan, Jr., *The algebraic structure of the representations of semisimple Lie group I*, Ann. of Math. **109** (1979), 1–60.

[96] D. A. Vogan, Jr., *Representations of Real Reductive Lie Groups*, Progress in Math. 15, Birkhäuser, 1981.

[97] D. A. Vogan, Jr., *Unitarizability of certain series of representations*, Ann. of Math. (1984), 141–187.

[98] D. A. Vogan, Jr., *Irreducibility of discrete series representations for semisimple symmetric spaces*, Advanced Studies in Pure Math. **14** (1988), 191–221.

[99] D. A. Vogan, Jr., *The orbit method and unitary representations for reductive Lie groups*, Algebraic and Analytic Methods in Representation Theory (B. Ørsted and H. Schlichtkrull, ed.), Perspectives in Math., vol. 17, Academic Press, San Diego, 1996, pp. 243–339.

[100] N. Wallach, *On the unitarizability of derived functor modules*, Invent. Math. **78** (1984), 131–141.

[101] N. Wallach, *Real Reductive Groups* I, II, Pure and Appl. Math., vol. 132, Academic Press, 1988, 1992.

[102] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups* I, II, Springer, 1972.

[103] A. Weil, 数学の創造, 日本評論社, 1983, 杉浦光夫訳.

[104] H. Yamashita, *Criteria for the finiteness of restriction of $U(\mathfrak{g})$-modules to subalgebras and applications to Harish-Chandra modules*, J. Funct. Anal. **121** (1994), 296–329.

[105] R. J. Zimmer, *Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces*, J. A.M.S. **7** (1994), 159–168.

[106] G. J. Zuckerman, *Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie groups*, Ann. of Math. **106** (1977), 295–308.