多様体上の大域解析と簡約群の表現論*

東京大学大学院数理科学研究科 · Kavli IPMU (WPI)　小林俊行
Toshiyuki Kobayashi
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo,
Kavli IPMU (WPI)

October 20, 2019

群 G が多様体 X に作用しているとき，X 上の関数 (あるいは微分形式，コホモロジー，$\cdots$) には群 G が自然に作用するので，G の表現 (**正則表現**) が定義される．コンパクト群の Peter–Weyl の定理，(非コンパクト) 簡約リー群の Plancherel 型定理，半単純対称空間の非可換調和解析など，(特別に良い構造をもつ等質空間に対しては) 正則表現の既約表現を用いた大域解析が，約一世紀に亘って大きな成功をおさめてきた．本稿では，非常に一般的な設定において，多様体の大域解析と (無限次元の) 表現論に関する可能性と最近の知見を論じよう．

1　大域解析における表現のグリップ力：重複度の有限性および一様有界性の幾何的判定条件

そもそも表現論が大域解析に役立つのか，という根本的な疑問を考えてみよう．この疑問を掘り起こす指針として次の視点を提起する ([12])．

基本問題 1.1 (表現のグリップ力)．リー群 G が X に作用しているとき，X の関数空間は G の表現論によって十分に**掌握**できるか？

「掌握できる」あるいは逆に「制御しきれない」という漠然とした言葉を数学として定式化する必要がある．まず，次のことに着目しよう．

*2019 年度 RIMS 共同研究 (公開型) 「表現論とその周辺分野の進展」，2019 年 7 月 9 日 (火)–7 月 12 日 (金)，京都大学数理解析研究所 (世話人: 大島芳樹氏), 講演録

観察 1.2. 無限次元の G 加群 V には，(ときには連続濃度の) 相異なる既約部分表現が含まれ，それぞれの既約表現の重複度も有限から無限まで起こりうる．このような一般的な状況に対峙するときでも，

- 異なる既約表現は，群作用によって区別できる
- 同じ既約表現が重複して現れる部分は，群作用では区別できない

という原理が成り立つ．

上記の観察より，既約表現の重複度は "群のグリップ力" を測る量であるとみなすことができる．そこで群 G の既約表現 Π に対して，$C^\infty(X)$ における Π の重複度を

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\Pi, C^\infty(X)) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{1.1}$$

として定義し，基本問題 1.1 を以下のように定式化する．

問題 1.3 (大域解析における表現のグリップ力). X をリー群 G が作用している多様体とする．
(1) 正則表現 $C^\infty(X)$ における群 G の各既約表現 Π の重複度 (1.1) が常に有限になるための，組 (G, X) に関する必要十分条件を与えよ．
(2) 重複度が一様有界になるための組 (G, X) に関する条件を決定せよ．

(1) では重複度が既約表現 Π に依存することも許容しているので，(2) の方が "グリップ力が強い" といえる．問題 1.3 では群 G が推移的に作用している場合が本質的に重要となるので，以下では X が G の等質空間であると仮定する．

G が簡約リー群の場合，基本問題 1.3 は小林–大島 [15] により完全に解決された．この必要十分条件を述べるため，変換群論における基本的な概念を準備しよう．次の用語は筆者によって導入された ([8]).

定義 1.4 (実球多様体). 連結な実多様体 X に簡約リー群 G が連続に作用しているとする．G の極小放物型部分群が X に開軌道を有するとき，X を G の**実球多様体** (real spherical) という．

次の例で述べるように，球多様体 (spherical variety) は実球多様体の特別な場合である．

例 1.5 (球多様体). $G_{\mathbb{C}}$ が**複素**簡約リー群，$X_{\mathbb{C}}$ が**複素**多様体，$G_{\mathbb{C}}$ の $X_{\mathbb{C}}$ への作用が正則 (holomorphic) のとき，定義 1.4 の条件は

「$G_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群が $X_{\mathbb{C}}$ に開軌道を有する」

ことを意味する．この場合は実球多様体は，**球多様体**と呼ばれ，代数幾何や代数的表現論や数論との繋がりによる多くの研究がある．

例 1.6. X を G を簡約リー群の等質空間，$X_{\mathbb{C}}$ をその複素化とする．
(1) 以下の関係が成り立つ．

$$\begin{array}{l} X \text{ は対称空間} \\ \qquad \Downarrow \text{ Wolf} \\ X_{\mathbb{C}} \text{ は球多様体} \\ \qquad \Downarrow \text{ 小林–大島 [15]} \\ X \text{ は実球多様体} \\ \qquad \Uparrow \\ G \text{ はコンパクト} \end{array}$$

(2) 既約な対称空間は Berger [3] によってリー代数のレベルで分類された．
(3) X に G 不変なリーマン計量が入る場合

$$X \text{ が (Selberg の意味の) 弱対称空間} \Longleftrightarrow X_{\mathbb{C}} \text{ は球多様体}$$

が成り立つ．
(4) 球多様体 $X_{\mathbb{C}}$ は，Krämer, Brion, Mikityuk により分類理論が進展した．
(5) $(G \times G \times G)/\operatorname{diag} G$ は対称空間ではない．この空間がいつ実球多様体になるかは小林 [8] で決定された (これはテンソル積表現の重複度の有限性の問題に応用される ([8, 9])．さらなる分類理論は [14] を参照されたい)．
(6) N を G の極大冪零部分群とする．このとき G/N は常に実球多様体である (Bruhat 分解)．さらに

$$G_{\mathbb{C}}/N_{\mathbb{C}} \text{ が球多様体} \Longleftrightarrow G \text{ は quasi split}$$

が成り立つ．

以下では，$\mathrm{Irr}(G)$ を簡約リー群 G の既約認容表現全体のなす同値類とする．ここではユニタリ性を課していないことに注意する．

基本問題 1.1 を数学的に厳密に定式化した問題 1.3 の解は以下の 2 つの定理で与えられる．

定理 1.7 (重複度の有限性の判定条件 [15])**.** G を簡約リー群，H を簡約な代数的部分群とし，$X = G/H$ とおく．このとき組 (G, X) に関する次の 2 条件は同値である．

(i) (表現論) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\Pi, C^\infty(X)) < \infty$ ($^\forall \Pi \in \mathrm{Irr}(G)$).

(ii) (幾何) X は実球多様体である．

論文 [15] では，(ii) $\Rightarrow$ (i) は確定特異点をもつ偏微分方程式系に対する (超函数の) 境界値写像を用い，(i) $\Rightarrow$ (ii) は Poisson 変換の一般化を用いることによって，定理 1.7 の証明を行った．この証明は (i) と (ii) が単に同値であるだけではなく，重複度の上と下からの評価式も含む．この評価式を用いることにより，重複度が，いつ一様有界性をもつかについて，以下の判定条件が得られた．

定理 1.8 (重複度の一様有界性の判定条件 [15])**.** G を簡約リー群，H を簡約な代数的部分群とし，$X = G/H$ とおく．このとき，組 (G, X) に関する次の 3 条件は同値である．

(i) (表現論) ある定数 C が存在して $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\Pi, C^\infty(X)) \le C \quad ({}^\forall \Pi \in \mathrm{Irr}(G))$ が成り立つ．

(ii) (複素幾何) X の複素化 $X_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の球多様体である．

(iii) (環論) X 上の G 不変な微分作用素のなす環は可換である．

注意 1.9. 定理 1.7 と定理 1.8 は，それぞれ基本問題 1.3 (1) と (2) の解を与えている．より一般に，関数空間 $C^\infty(X)$ だけでなく，超函数の空間や同変ベクトル束の切断の空間に対して，あるいは，部分群 H が簡約であるという仮定を外した場合の一般化も成り立つ (詳しくは [15, Thm. A, Thm. B] を参照されたい)．例えば，Whittaker 模型の理論 (Kostant–Lynch, 松本久義) は H が冪零部分群の場合を対象とするが，このようなケースに対しても定理 1.7 や定理 1.8(の拡張) を適用できる ([15, Rem. 2.5])．

注意 1.10. 重複度の**有限性**の判定条件 (定理 1.7) は実形の情報が不可欠であるのに対し，定理 1.8 では,「重複度の**一様有界性**」という性質が，実形によらず複素化のみで決定されるという発見を含んでいる．この発見は，同種の命題が非アルキメデス的局所体上の簡約代数群でも成り立つことを予期させるものであった．最近，Sakellaridis–Venkatesh [18] はこの方向で，肯定的な結果を得ている．

注意 1.11. 退化した放物型部分群 Q からの誘導表現に対しても一般化された Poisson 変換を考えることができ，定理 1.7 の (i) $\Rightarrow$ (ii) を Q-series の表現に一般化できる (Q-series による定式化は [9] 参照)．また最近，田内君 ([19]) は定理 2.10 (ii) $\Rightarrow$ (i) の $\mathcal{D}$ 加群を用いた別証明を与えた．

定理 1.7 や定理 1.8 は，表現論の “グリップ力が強い” 大域解析の舞台が何であるかを明示する．従来，大きな成功をおさめてきた Whittaker 模型の理論や半単純対称空間上の解析はこの枠組の特別なケースといえる (例 1.6 の (1) と (6))．一方，従来になかった新しい舞台の 1 つとして，分岐則の問題が挙げられる．分岐則における基本問題は大域解析における基本問題 1.1 に呼応して，以下のように述べられる．

基本問題 1.12 (分岐則のグリップ力). 群 G の (無限次元) 既約表現 π を部分群 G' に制限したとき,

(1) 分岐則に現れる G' の既約表現の重複度は有限か?

(2) 分岐則に現れる G' の既約表現の重複度は一様有界か?

これらに関する分岐則の一般理論は [9] およびその文献，分岐則問題のプログラムは [1]，具体的な応用例として「対称性破れ作用素の構成問題」については，[13, 16, 17] 等を参照されたい.

2 正則表現 $L^2(X)$ のスペクトル: 緩増加になるための幾何的条件

前節では，関数空間における群の “グリップ力” という観点から “重複度” に着目し,「大域解析を深化させるのに適した枠組」として (実) 球多様体上の解析を提起した．この節では，X が (実) 球多様体ではなく，X 上の関数空間における表現論の “グリップ力が弱い” 場合でも，$L^2(X)$ を “粗い立場” で解析できないだろうか，というテーマを取り上げる．そこで，新しい視点として，**球多様体でない場合**も含めて Plancherel 測度の台がどのような集合になるかに着目し，以下の問題を考えよう.

基本問題 2.1. 簡約リー群 G が多様体 X に作用しているとき，正則表現 $L^2(X)$ が緩増加表現となるための，必要十分条件を決定せよ.

ここで，緩増加表現の定義を思い起こそう.

定義 2.2. ユニタリ表現 π は，その任意の行列要素 $G \ni g \mapsto (\pi(g)u, v) \in \mathbb{C}$ が G の任意のコンパクト集合上で正則表現 $L^2(G)$ の行列要素の線型結合で一様に近似できるとき**緩増加表現** (tempered representation) という.

一般に，局所コンパクト群のユニタリ表現は既約ユニタリ表現に分解できる (Mautner–Teleman).

$$\pi \simeq \int^{\oplus} \pi_\lambda d\mu(\lambda)$$

このとき

$$\pi \text{ が緩増加表現} \Longleftrightarrow \text{測度 } \mu \text{ に関して殆どすべての } \lambda \text{ で } \pi_\lambda \text{ が緩増加表現}$$

が成り立つ (Benoist–小林 [1, Remark 2.6]).

簡約リー群 G の **既約な** 緩増加表現はKnapp–Zuckerman [4] によって分類された．簡約リー群のユニタリ双対 (既約ユニタリ表現の同値類) は分類が完成していないが，その中で，既約な緩増加表現は良く理解できている部分である．Kirillov–Kostant–Duflo の軌道法の立場から言えば，既約緩増加表現は大まかには regular な半単純余随伴軌道に "対応する" 既約ユニタリ表現である ([7])．また Langlands による (ユニタリ性を課さない) 既約認容表現の分類理論において，Knapp–Zuckermann による既約な緩増加表現の分類理論は重要な役割を果たした．

観察 2.3. 半単純対称空間 G/H に対しては，大島利雄氏や Delorme によって Plancherel 型定理が得られているにも関わらず，$L^2(G/H)$ が緩増加となるための必要十分条件はBenoist–小林による一般理論 [1] が確立するまで知られていなかったようである (後述の定理 2.10 の前半部分に対応する．「$(G/H)_{\mathrm{Am}}$ が G/H で稠密である」ことが緩増加性の十分条件であることは G/H が対称空間の場合にはPlancherel 型定理より導くことができるが，それは必要条件ではなく，実際，反例が存在する)．Plancherel 型定理に関する現在の知見に基づいて問題 2.1 に答えるためには，Zuckerman 導来函手加群として表される，あるコホモロジーの (非) 消滅条件についての情報が必要となるが，一般にこの (非) 消滅条件はパラメータが特異な場合は複雑になる ([6, 20])．

観察 2.4. より一般に $X_{\mathbb{C}}$ が $G_{\mathbb{C}}$ の球多様体とは限らない場合，定理 1.8 でみたように，X 上の G 不変な微分作用素環 $\mathbb{D}_G(X)$ が可換環とならず，X 上の関数を $\mathbb{D}_G(X)$ の元で同時固有関数展開するという従来の非可換調和解析の手法が有効に使えない．

上記の観察からも察せられるように，基本問題 2.1 に取組むためには，手法自身を新たに開発する必要がある．新しいアプローチとして幾何学的群論の発想を用いる．

定義 2.5. 局所コンパクト群 G が局所コンパクト位相空間 X に連続に作用しているとする．X の任意のコンパクト部分集合 S に対し

$$G_S := \{s \in G : gS \cap S \neq \emptyset\}$$

が G のコンパクト集合となるとき，この作用を固有 (proper) という．

簡単なケースから始めよう．H が G のコンパクト部分群ならば，群 G は $X = G/H$ に固有に作用する．また $L^2(X) \subset L^2(G)$ が成り立つ．このことから次のことが直ちに分かる．

例 2.6. 群 G の X への作用が固有 (定義 2.5) ならば，$L^2(X)$ は緩増加となる．

そこで，以下では群 G の X への作用が固有でない場合を考える．これは，X のコンパクト部分集合 S が存在して $\{g \in G : gS \cap S \neq \emptyset\}$ が非コンパクトであることを意味する．この**定性的性質**を**定量的**に取扱うため，体積 $\mathrm{vol}(gS \cap S)$ を考える．写像

$$G \ni g \mapsto \mathrm{vol}(gS \cap S) \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

は，$g \in G$ の連続関数であり，群 G の X への作用が固有でないという仮定と，あるコンパクト集合 S に対して (2.1) の台は非コンパクトであることとは同値である．G 上の関数としての体積 $\mathrm{vol}(gS \cap S)$ の漸近挙動は，作用が固有でない "度合" を捉えるものとみなせる．

基本問題 2.1 は，Benoist–小林 ([1, 2]) によって X が代数多様体の場合に，完全に解決されたが，その手法のアイディアは $\mathrm{vol}(gS \cap S)$ の漸近挙動を通じて，解析的な性質と幾何的な性質を結びつけようというものである．

緩増加性の幾何的判定条件を正確に述べるために，以下の関数を導入しよう．

定義 2.7 (表現のモーメント)**.** 有限次元の実ベクトル空間 V 上に与えられたリー代数 $\mathfrak{h}$ の実表現 $\sigma\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ に対し，その**モーメント** ρ_V とは

$$\rho_V\colon \mathfrak{h} \to \mathbb{R}, \quad Y \mapsto V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \text{ における } \sigma(Y) \text{ の固有値の実部の絶対値の和}$$

として定義される $\mathfrak{h}$ 上の関数である．

ρ_V はリー代数 $\mathfrak{h}$ の極大可換分裂代数 $\mathfrak{a}$ への制限で一意的に決定される．さらに，制限 $\rho_V|_{\mathfrak{a}}$ は局所的に線型である．(σ, V) が随伴表現 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{h})$ の場合，$\rho_{\mathfrak{h}}|_{\mathfrak{a}}$ はルート系を用いて計算できる．

随伴表現のモーメントを用いて，基本問題 2.1 の必要十分条件が与えられる．

定理 2.8 ($L^2(X)$ の緩増加性の判定条件 [2])**.** G を簡約リー群，H を G の連結な閉部分群とし，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ をそれぞれのリー代数とする．このとき組 (G, H) に関する次の 2 条件は同値である．

(i) (大域解析) 正則表現 $L^2(G/H)$ は緩増加である．

(ii) (組合せ幾何) $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$.

注意 2.9. G が代数群であり X が代数多様体ならば，X が G の等質空間でない場合にも，generic な G 軌道に定理 2.8 を適用することによって $L^2(X)$ がいつ緩増加になるか，という基本問題 2.1 を解くことができる ([2])．

定理 2.8 は G が実簡約代数群，H が簡約な代数的部分群のときに，最初に [1] で証明された．この場合は次の定理も成り立つ．

定理 2.10 ([1])**.** $G \supset H$ を実簡約代数群の組とし，

$$
\begin{aligned}
(G/H)_{\mathrm{Am}} &:= \{x \in G/H : x \text{ における } H \text{ の固定部分群が amenable}\} \\
(G/H)_{\mathrm{Ab}} &:= \{x \in G/H : x \text{ における } H \text{ の固定部分群が abelian}\}
\end{aligned}
$$

とおく．このとき，

$$
\begin{gathered}
(G/H)_{\mathrm{Ab}} \text{ が } G/H \text{ で稠密} \\
\Downarrow \\
L^2(G/H) \text{ が緩増加表現} \\
\Downarrow \\
(G/H)_{\mathrm{Am}} \text{ が } G/H \text{ で稠密}
\end{gathered}
$$

が成り立つ．

系 2.11. $G \supset H$ を複素簡約代数群の組とするとき，次の 2 条件は同値である．

(i) $L^2(G/H)$ が緩増加表現

(ii) $(G/H)_{\mathrm{Ab}}$ が G/H で稠密．

References

[1] Y. Benoist, T. Kobayashi, *Temperedness of reductive homogeneous spaces*, J. Eur. Math. Soc., **17** (2015), pp. 3015–3036.

[2] Y. Benoist, T. Kobayashi, Tempered homogeneous spaces, to appear in Margulis Festschrift, available at arXiv:1706.10131.

[3] M. Berger, *Les espaces symétriques non compacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **74** (1957), 85–177.

[4] A. W. Knapp and G. J. Zuckerman, Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups, Ann. of Math. (2) **116** (1982), no. 2, 389–455; II. ibid., 457–501.

[5] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), pp. 249–263.

[6] T. Kobayashi, Singular unitary representations and discrete series for indefinite Stiefel manifolds $U(p,q;\mathbb{F})/U(p-m,q;\mathbb{F})$, Mem. Amer. Math. Soc. 95, no. 462, vi+106 pp. (1992).

[7] T. Kobayashi, 簡約型等質多様体上の調和解析とユニタリ表現，数学 **46** (1994), pp. 124–143; *Harmonic analysis on homogeneous manifolds of reductive type and unitary representation theory*, *Translations, Series* II, Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants, **183** (1998), Amer. Math. Soc., pp. 1–31 (英訳).

[8] T. Kobayashi, *Introduction to harmonic analysis on real spherical homogeneous spaces*, Proceedings of the 3rd Summer School on Number Theory "Homogeneous Spaces and Automorphic Forms" in Nagano (F. Sato, ed.), 1995, 22–41 (in Japanese).

[9] T. Kobayashi, *Shintani functions, real spherical manifolds, and symmetry breaking operators*, Dev. Math., **37** (2014), pp. 127–159.

[10] T. Kobayashi, *A program for branching problems in the representation theory of real reductive groups*, In: Representations of Lie Groups: In Honor of D. A. Vogan, Jr. on his 60th Birthday, Progr. Math., **312** pp. 277–322, Birkhäuser, 2015.

[11] T. Kobayashi, Birth of new branching problems. 日本数学会 70 周年記念総合講演・企画特別講演アブストラクト，pp.65–92, 日本数学会, 2016.

[12] T. Kobayashi, 表現の分岐則の理論における最近の進展，日本数学会「数学」，論説, 71 巻 4 号, pp. 388–416, 2019.

[13] T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner, Conformal Symmetry Breaking Operators for Differential Forms on Spheres, Lecture Notes in Math., **2170** Springer, 2016, viii + 192 pages.

[14] T. Kobayashi, T. Matsuki, Classification of finite-multiplicity symmetric pairs, Transform. Groups **19** (2014), 457–493, Special issue in honor of Dynkin for his 90th birthday.

[15] T. Kobayashi, T. Oshima, *Finite multiplicity theorems for induction and restriction*, Adv. Math., **248** (2013), pp. 921–944.

[16] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry breaking for representations of rank one orthogonal groups, (2015), Mem. Amer. Math. Soc. **238** no.1126, 118 pages.

[17] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry Breaking for Representations of Rank One Orthogonal Groups, Part II, Lecture Notes in Math., **2234** Springer, 2018. xv+342 pages.

[18] Y. Sakellaridis and A. Venkatesh, Periods and Harmonic Analysis on Spherical Varieties, Asterisque, **396**, Soc. Math. France, 2018.

[19] T. Tauchi, A generalized uniformly bounded multiplicity theorem, 本講究録に収録予定.

[20] P. E. Trapa, Annihilators and associated varieties of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ modules for $U(p,q)$, Compos. Math. **129**, 1–45 (2001).