表現の分岐則の理論における最近の進展

小　林　俊　行

群の表現は部分群に制限したときにどのように振舞うか？あるいは，(広い意味で) どのように既約分解するか？こういった表現の**分岐則**の問題は，数学のさまざまな場面で自然に現れる．テンソル積表現の分解はその一例である．等質空間 X 上の関数を展開する Plancherel 型定理は，“隠れた対称性” に関する分岐則の問題としばしば同値になる．また，整数論で用いられるテータ対応も分岐則の一種である．さらに，部分多様体の幾何を関数空間を通じて理解しようとすると，変換群に関する分岐則の問題が自然な形で生じる．

さて，有限次元の表現の分岐則は原理的に計算可能である．分岐則を計算するための組合せ論の手法や種々のアルゴリズムも開発されている．一方，$GL(n,\mathbb{R})$ などの非コンパクトな簡約リー群の既約表現はその大部分が無限次元であり，一般には，分岐則を計算する “アルゴリズム” は知られていない．実際，与えられた表現を部分群が “十分に統制しきれない” 現象 (第 6.2 節) もしばしば起り，逆に，「受け皿」となる部分群の既約表現が未知であることもある．

筆者が無限次元表現の分岐則の問題に立ち向かい始めた 1980 年代半ばにおいては，特殊な事例研究を除いて，簡約リー群の無限次元表現に対する分岐則の一般理論の構築は絶望的であると考えられていたようである．$SL(2,\mathbb{R})$ より大きな群の分岐則を考えると “悪い現象” が立ちはだかり，筋の良さそうな方向が見当たらないのである．筆者は分岐則の問題に生じる “悪い現象” を徹底的に分析する中で，いくつかの “不思議な現象” に遭遇し，そこから一般的な原理を根本から解明する機会に恵まれた．このようにして生まれた「離散的分岐則の理論」，「可視的作用の理論」，「重複度の理論」，「対称性破れ作用素の構成」などの新しいテーマを通じて次第に多くの数学者が加わり，かつて絶望的と考えられていた**簡約リー群の無限次元表現の分岐則**の理論が全く新しい発展段階に進展している．

この論説では最近の 20 ∼ 30 年間に開発された一般理論を通じて，「表現の制限」の問題を俯瞰し，さらに分岐則の解析を深化させる構想を紹介する．

1　表現の分岐則—はじめに

日本数学会の 70 周年の記念行事ということで，最近めざましく発展している領域をふりかえり，今後の展望について講演してほしいという依頼を受けた．網羅的に述べるのは不可能なので，筆者自身が携わり，しかもこの 20 ∼ 30 年位の間に著しい発展があった「簡約リー群の表現の分岐則の理論」を主軸としつつ，それに関連する大域解析や不連続群論の新しい話題に触れようと思う．本稿はその講演記録 [59] を下敷きにし，専門家でない方々も読まれることを意識して，できるだけ分かりやすくなるよう心がけて書き下ろした．その一方で，取り上げることができない，いくつもの重要な話題があることを予めお断りしたい．

1.1　表現の分岐則とは?

以下では原則として，群の既約表現を Π などのギリシャ語の大文字で，部分群の既約表現を π な

どの小文字で表す．ベクトル空間 V 上に群 G の表現 Π が与えられたとき，表現空間 V はそのままで，作用だけを部分群 G' に制限して得られる表現を $\Pi|_{G'}$ と表記する．すなわち，

$$\Pi|_{G'}\colon G' \hookrightarrow G \xrightarrow{\Pi} GL(V). \tag{1.1}$$

Π が G の既約表現であっても，制限 $\Pi|_{G'}$ は部分群 G' の表現として一般には既約にならない[1)]．

まず古典的な場合として，Π が有限次元表現の場合を考えよう．$\Pi|_{G'}$ が完全可約ならば

$$\Pi|_{G'} \simeq \bigoplus_{\pi} (\underbrace{\pi \oplus \cdots \oplus \pi}_{m(\Pi,\pi)\ \text{個}}) = \bigoplus_{\pi} m(\Pi,\pi)\pi \tag{1.2}$$

という形で G' の既約表現の有限直和として記述できる．既約分解 (1.2) は制限 $\Pi|_{G'}$ の**分岐則 (branching law)** の原型となるものである．部分群 G' の既約表現 π が Π に現れる回数 $m(\Pi,\pi)$ を分岐則の**重複度**とよぶ．有限次元表現 $\Pi|_{G'}$ が完全可約という仮定の下で次の等式が成り立つ．

$$m(\Pi,\pi) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{G'}(\pi, \Pi|_{G'}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi). \tag{1.3}$$

この論説では，Π が無限次元表現の場合を考察する．表現空間 V が有限次元の場合と異なり，V に G' の既約部分表現が全く存在しないことや，分岐則の "重複度" が無限になることも起こりうる．無限次元表現に対する**分岐則の問題** (branching problem) というときは，単に既約分解だけを目指すのではなく，より広く「表現の制限」そのものを理解することを目指し，次の問題を考える．

問題 1.1 (分岐則の問題)　制限 $\Pi|_{G'}$ は部分群 G' の表現としてどのように振舞うか?

1.2　表現の制限と分岐則の例

「表現の制限」に関わる話題を列挙してみよう．それぞれの例における専門用語になじみのないものがあれば読み飛ばし，全体としての「分岐則に関わるテーマの広がり」を感じていただきたい．

例 1.2 (テンソル積表現)　群 H の 2 つの表現 (π_j, V_j) $(j=1,2)$ のテンソル積表現

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \colon H \to GL(V_1 \otimes V_2), \quad h \mapsto \pi_1(h) \otimes \pi_2(h)$$

は「表現の制限」の一例と解釈できる．すなわち，直積群 $G := H \times H$ の外部テンソル積表現

$$\pi_1 \boxtimes \pi_2 \colon H \times H \to GL(V_1 \otimes V_2), \quad (h_1,h_2) \mapsto \pi_1(h_1) \otimes \pi_2(h_2)$$

を H と同型な部分群 $G' := \{(h,h) : h \in H\}$ に制限した表現 $(\pi_1 \boxtimes \pi_2)|_{G'}$ がテンソル積表現 $\pi_1 \otimes \pi_2$ に他ならない．量子力学における fusion rule, Clebsch–Gordan の法則，Pieri の法則などはいずれもテンソル積 $\pi_1 \otimes \pi_2$ の既約分解の特別な例である．

例 1.3 (Cartan–Weyl の最高ウェイト理論)　連結なコンパクトリー群 G の既約な有限次元表現は，G の極大トーラス T に制限した分岐則の "端" (**最高ウェイト**) で分類できる．

例 1.4 (Vogan の最小 $\boldsymbol{K}$ タイプ理論)　簡約リー群 G の既約な認容表現 Π (定義 2.12 参照) は極大コンパクト部分群 K に制限した分岐則の "端" (**最小 $\boldsymbol{K}$ タイプ**) を不変量の 1 つとして分類できる [96]．これは Langlands 流の分類とは独立した分類理論である (第 2.6 節)．

例 1.5 (指標理論)　G を 簡約リー群とし，その Cartan 部分群の完全代表系を $H_1, \cdots, H_k$ とする．G の既約認容表現 Π (定義 2.12) の超函数指標 $\mathrm{Trace}(\Pi)$ は G 上の局所可積分関数となり，従っ

て，Cartan 部分群 H_j $(j=1,\cdots,k)$ への制限で決定される (Harish-Chandra)．G がコンパクトの場合は $k=1$ であり，$\mathrm{Trace}(\Pi)|_{H_1}=\mathrm{Trace}(\Pi|_{H_1})$ の明示式は Weyl の指標公式として知られる．

例 1.6 (テータ対応)　Π をメタプレクティック群 $G=Sp^{\sim}$ の Weil 表現，$G':=G'_1\cdot G'_2$ を dual pair をなす G の部分群 (すなわち G'_1 と G'_2 が G の中で互いの交換子となっている部分群) とする．このとき，制限 $\Pi|_{G'}$ の (広い意味での) 分岐則はテータ対応を与える (Howe [22])．

例 1.7 (Rankin–Cohen 微分作用素)　低いウェイトのモジュラー形式から高いウェイトのモジュラー形式を明示的に構成する Rankin–Cohen 微分作用素 [12, 85] は，$SL(2,(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現のテンソル積の分解に関する “対称性破れ作用素” である (第 8.2 節)．

例 1.8 (表現のコホモロジー)　$\mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'},\pi)$ が零となる場合，高次コホモロジー $\mathrm{Ext}^*_{G'}(\Pi|_{G'},\pi)$ に着目するのは自然な考え方である．特に G を簡約リー群，$\pi=\mathbf{1}$ (自明表現) とし，部分群 G' のかわりに極大冪零部分リー代数 $\mathfrak{n}$ を考えたときのコホモロジーは，解析的表現論における行列要素の漸近挙動と関連した情報を内包している．

例 1.9 (Gross–Prasad 予想)　局所体上定義された群の組 $(G,G')=(O_n,O_{n-1})$ に対して，G の既約認容表現 Π を部分群 G' に制限したときの分岐則は無重複となる ([2, 93])．Gross–Prasad 予想 [18] は Π が緩増加表現 (定義 2.3) の場合の (広い意味での) 分岐則を記述するものである．

例 1.10 (モジュラー多様体)　算術的部分群 Γ の商として得られる局所リーマン対称空間 $X=\Gamma\backslash G/K$ において，群 G の部分群 G' が定める部分多様体 (**モジュラー多様体**) のホモロジーは，G の保型表現を部分群 G' に制限したときの分岐則と双対的な概念と見なせる．

これらの諸例で観察されるように，分岐則の問題は表現の構造に深く関わると同時に，数学のさまざまな分野と関連した形で現れる．

1.3　無限次元表現の分岐則

この論説では，大域解析とのつながりを重視し，リー群の無限次元の表現を扱う．表現論では大きく分けて，表現空間 V に位相を入れないで表現を扱う代数的アプローチと，V に位相を入れて (連続) 表現を扱う解析的アプローチとがある．ここで位相線型空間 V 上の位相群 G の表現 Π は，

$$G\times V\to V,\qquad (g,v)\mapsto \Pi(g)v$$

が連続写像であるとき，**連続表現**という．以下では，特に断らない限り，連続表現を考える．

定義 1.11 (ユニタリ表現)　Hilbert 空間 V 上に定義された群 G の連続表現 $\Pi\colon G\to GL(V)$ は，すべての $g\in G$ に対して $\Pi(g)$ がユニタリ作用素であるとき**ユニタリ表現**という．

Π がユニタリ表現ならば，制限 $\Pi|_{G'}$ は直積分を用いて既約分解することができる (後述の定理 2.2 参照)．ただし，分岐則の “重複度” は有限とは限らず，さらに “連続スペクトラム” も出現することがある．一方，Π がユニタリ表現とは限らない，より一般の場合，制限 $\Pi|_{G'}$ の “既約分解” の代わりに，部分群 G' の既約表現 π との間の連続な G' 準同型写像に焦点を当てる．すなわち，

対称性破れ作用素の空間	$\mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'},\pi)$,
ホログラフィック作用素の空間	$\mathrm{Hom}_{G'}(\pi,\Pi|_{G'})$

が重要な研究対象となる．両者の次元は，表現空間のトポロジーに依存して大きく異なりうる [57]．

1.4 簡約リー群の表現の分岐則

序を終えるにあたって，本論説の主題である「簡約リー群 G の場合の分岐則の問題」について，有限次元表現の場合と無限次元表現の場合を比較し，短くまとめておく．

- 有限次元表現の分岐則

—“受け皿” となる既約表現は 20 世紀初頭に分類された (Cartan–Weyl の最高ウェイト理論, 例 2.7).
—分岐則を計算する組合せ論のアルゴリズムが存在する (例. Littlewood–Richardson rule).

- 無限次元表現の分岐則 (ユニタリ表現の場合)

—“受け皿” となる既約ユニタリ表現の分類は未解決 (第 2.6 節).
—分岐則を求めるアルゴリズムは特殊な場合を除くと知られていない.
—分岐則に “連続スペクトラム” が現れうる (第 2.3 節).
—重複度が無限になるなど部分群 G' の “グリップ力” が弱い現象が起こりうる (第 6.2 節).

- 無限次元表現の分岐則 (ユニタリ性を課さない場合)

—“受け皿” となる既約認容表現は 1980 年代に分類が完成した (第 2.6 節).
—いつ対称性破れ作用素が存在するかは一般に難しいが，新しい理論が芽生えている (第 8.3 節).

以下ではここで触れた基礎的事項を解説しながら，分岐則の理論の新しい発展と構想を紹介する．

2 より根源的なものを求めて—“既約” の分類と “既約” への分解

分岐則の問題がリー群の表現論の中でどのような位置づけにあるか全体像を考えてみることにする．

リー群 (連続群) は，1870 年代 偏微分方程式の解の変換群として，Sophus Lie (1842–1899) によって生み出された概念である．リー群やその表現論は，解析，幾何，代数 が幾重にも交わりながら発展してきた．ここでは (1) 「最小単位」の分類，(2) 与えられたものを「最小単位」のものから統合する，という観点から，リー群やその表現論において何が解決し何が未解決なのかについて現状を整理し，それに関わる数学の諸分野との結びつきを手短に解説する．

2.1 リー群とリー代数

リー代数とその最小単位 : 非自明なイデアルを持たないリー代数 $\mathfrak{g}$ を単純リー代数という．$\mathbb{R}$ 上の有限次元単純リー代数は $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(p,q)$, $\mathfrak{su}^*(2n)$, $\mathfrak{so}^*(2n)$, $\mathfrak{so}(p,q)$, $\mathfrak{sp}(p,q)$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ という古典型の 10 系列と 22 個の例外型に分類される (É. Cartan, 1914).

最小単位のものへの分解 : 任意の有限次元リー代数は 単純リー代数と可換リー代数の拡大を繰り返すことで得られる．拡大のない場合，すなわち，単純リー代数と可換リー代数の直和で表されるリー代数を**簡約リー代数**といい，単純リー代数だけの直和で表されるリー代数を**半単純リー代数**という．

リー群: 群と多様体の構造を合わせ持つのがリー群である．$M(n,\mathbb{R})$ の中で多項式の零点として得られる群 (**代数群**) はリー群の典型例である．リー代数はリー群の無限小レベルの代数構造であり，リー群のすべての (局所的な）性質は，リー代数の言葉で記述できる (**リー理論**)．対応するリー代数が単純，半単純，簡約であるようなリー群を順に単純リー群，半単純リー群，**簡約リー群**という．

簡約リー群: 簡約リー群は可換リー群および単純リー群たちの直積に局所同型である．**古典群**と称せられる $GL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{C})$, $O(p,q)$, $Sp(n,\mathbb{R})$, . . . などは代数群であり，かつ，簡約リー群となる．簡約リー群 G の極大コンパクト群 K は内部同型を除いて一意的に定まり，等質空間 G/K はリーマン対称空間の構造をもつ [20]．特に，単純リー代数の分類は，単連結な既約リーマン対称空間の分

類と同値である．

2.2　表現論の基本課題

表現は線型性をもつベクトル空間上で定義されているので，重ね合わせの原理が成り立つ．そこで，“最小単位のものから構成する” という第 2 節の冒頭で述べた観点は，表現論においては，(1) 既約表現を分類する，(2) 与えられた表現を既約分解する，という 2 つの基本課題を提示する．

分岐則の問題は後者の「既約分解」に関わる主要テーマである．しかし，それだけではなく，前者の「既約表現の分類」においても有力な手法としての役割も担う (第 2.7 節でその例に触れる)．

2.3　既約分解

一般の表現は既約表現に分解できるとは限らない．実際，第 5 節で後述する分岐則のプログラムでは (普通の意味では) 既約分解できないという設定を含めて，“対称性破れ作用素” の研究を紹介する．しかし，ここではまず，既約分解できる場合に限定し，古典的な結果を思い起こそう．

ユニタリ表現という概念は，既約分解に適合した条件である．そこでの「最小単位」は既約ユニタリ表現である．以下に述べる定理 2.2(Mautner–Teleman) では，Hilbert 空間の族の直積分という概念を使って，ユニタリ表現 Π を既約なものに分解できることを主張する ([95, 第 6 章])．

定義 2.1 (ユニタリ双対)　位相群 G の既約ユニタリ表現の同値類のなす集合 $\widehat{G}$ を **ユニタリ双対** という．G が局所コンパクト群のときは，$\widehat{G}$ には自然な位相構造 (Fell 位相) が入る．

定理 2.2 (直積分ユニタリ表現の既約分解)　局所コンパクト群 G の任意のユニタリ表現 Π に対して，ユニタリ双対 $\widehat{G}$ 上のボレル測度 μ と可測関数 $n_\Pi\colon \widehat{G} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ が存在して，Π は

$$\Pi \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} n_\Pi(\pi)\pi d\mu(\pi) \qquad (\text{ユニタリ同値}) \tag{2.1}$$

と既約ユニタリ表現に直積分分解される．

定理 2.2 は “既約分解” に “連続スペクトラム” が現れる場合を取込んだ定式化である．G が簡約リー群の場合には，既約分解 (2.1) は一意的である (Harish-Chandra)．

定義 2.3　(1) (既約分解の台) 群 G のユニタリ表現 Π の既約分解 (2.1) の台として定まる $\widehat{G}$ の部分集合を $\mathrm{Supp}_{\widehat{G}}(\Pi)$ と表す．$\mathrm{Supp}_{\widehat{G}}(\Pi)$ が可算集合ならば，Π は既約ユニタリ表現に直和分解する (Π は**離散分解可能**であるという)．
(2) (緩増加表現) Π が G の正則表現 $L^2(G)$ の場合は $\mathrm{Supp}_{\widehat{G}}(L^2(G))$ を $\widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ と表記する．G のユニタリ表現 Π が $\mathrm{Supp}_{\widehat{G}}(\Pi) \subset \widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ をみたすとき，Π を**緩増加表現**という．

例 2.4　リー群 G が可換またはコンパクト (より一般に amenable) ならば，$\widehat{G}_{\mathrm{temp}} = \widehat{G}$ である．

例 2.5　G が簡約リー群の場合，既約な緩増加表現はその行列要素の漸近挙動で特徴づけることもできる．$\widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ は R 群と呼ばれる $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の直積群の言葉を用いて精密に分類されている (Knapp–Zuckerman [30])．

2.4　ユニタリ双対の分類問題—軌道法とシンプレクティック多様体の幾何学的量子化

リー群の既約ユニタリ表現はどのくらい存在するのだろうか？実は，一般のリー群 G に対して，そのユニタリ双対 $\widehat{G}$ の分類は未解決である．その現状は第 2.5 節と第 2.6 節で後述することとし，まず，分類が完成している例をいくつか挙げる．

例 2.6 (可換リー群)　可換リー群の既約ユニタリ表現はすべて 1 次元である．たとえば，$G = \mathbb{R}$

のとき，$\chi_\xi\colon \mathbb{R}\to GL(1,\mathbb{C})$, $x\mapsto e^{ix\xi}$ とおくと，$\widehat{\mathbb{R}}\simeq\{\chi_\xi : \xi\in\mathbb{R}\}$.

例 2.7 (コンパクトリー群，Cartan–Weyl 1925)　G が連結なコンパクトリー群の場合，既約ユニタリ表現 (Π, V) はすべて有限次元である．G のリー代数を $\mathfrak{g}$ とし，$\mathfrak{b}$ を複素リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ の Borel 部分代数とすると，V は $\mathfrak{b}$ の 1 次元部分表現 χ (**最高ウェイト**) によって分類される．

例 2.8 ($\boldsymbol{SL(n,\mathbb{F})}$, $\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$)　$G=PSL(2,\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現は自明な 1 次元表現と，連続無限濃度の互いに同値でない無限次元既約表現 (球ユニタリ主系列表現，補系列表現) および可算無限個の無限次元表現 (離散系列表現) から成る (Bargmann 1947)．この結果は $G=SL(n,\mathbb{R})$ の場合に一般化されている ($n=3$ の場合 Vakhutinski 1968, $n=4$ の場合 Speh 1981, n 一般 Vogan 1986); $G=SL(n,\mathbb{C})$ のユニタリ双対は $n=2$ の場合の Gelfand–Naimark (1947) に始まり，土川眞夫 1968 ($n=3$ の場合), Duflo 1980 ($n\le 5$), Barbasch 1985 (n 一般); $G=SL(n,\mathbb{H})$ のユニタリ双対は平井武 1962 ($n=2$ の場合), Vogan 1986 (n 一般) によって分類された．

例 2.9 (冪零リー群，Kirillov [26], 1962)　G が単連結な冪零リー群ならば，

$$\widehat{G}\ \simeq\ \mathfrak{g}^*/\,\mathrm{Ad}^*(G) \tag{2.2}$$

という自然な全単射が存在する．ここで，$\mathrm{Ad}^*\colon G\to GL_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^*)$ はリー群 G の余随伴表現，すなわち，$\mathrm{Ad}\colon G\to GL_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ の反傾表現である．(指数型可解リー群への拡張は [17] を参照されたい．)

上述の例 2.9 は G が冪零リー群のとき，ユニタリ双対 $\widehat{G}$ という “巨大な” 対象が，たった 1 つの有限次元表現である余随伴表現 $(\mathrm{Ad}^*,\mathfrak{g}^*)$ によって記述できるという視点を提示している．これを一般化したいというのが Kirillov–Kostant–Duflo による**軌道法**の考え方である [27]．たとえば，$G=GL(n,\mathbb{R})$ の場合 (2.2) の右辺は n 次実正方行列の Jordan 標準形の取り得る形全体に対応するが，この集合は $GL(n,\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現のパラメータ空間と “かなり類似” している．これが単なる偶然ではなく，少なくとも部分的には “幾何学的量子化” の立場から解釈できることをみよう．

物理学における「古典力学 $\rightsquigarrow$ 量子力学」という理論化の数学的背景に啓発された対応として，

$$\text{シンプレクティック多様体 } M \rightsquigarrow \text{Hilbert 空間 } \mathcal{H}$$
$$M \text{ におけるシンプレクティックな変換} \rightsquigarrow \mathcal{H} \text{ 上のユニタリ作用素}$$

という “**幾何学的量子化**” が適当な仮定の下で，自然に定義できたとしよう．このとき，単独の変換だけでなく，変換の族がなす群作用に対しても，次のような構図が成り立つことが期待される．

$$M \text{ への [推移的な] ハミルトニアンな作用} \rightsquigarrow \mathcal{H} \text{ 上の [既約な] ユニタリ表現} \tag{2.3}$$

さて，軌道法における (2.2) の左辺はリー群 G の余随伴軌道 $\mathcal{O}_\lambda=\mathrm{Ad}^*(G)\lambda$ ($\lambda\in\mathfrak{g}^*$) のなす空間と同一視される．それぞれの余随伴軌道 $\mathcal{O}_\lambda$ には歪対称双線型形式

$$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R},\quad (X,Y)\mapsto\lambda([X,Y])$$

が導くシンプレクティック構造が入り，群 G の作用は明らかにハミルトニアンかつ推移的である (Kirillov–Kostant–Soureau)．従って (2.3) をみたす幾何学的量子化の構図が成立するならば，軌道法 (2.2) の右辺の元 $\mathcal{O}_\lambda$ から左辺への対応が得られることになる．

リー群の表現論に関する 1950 年代 ∼1990 年代の種々の解析 · 幾何的な結果や代数的な諸定理 [29,

34, 96, 97, 98, 100] をこの立場で解釈して統合すると，G が簡約リー群で，$\mathcal{O}_\lambda$ が半単純軌道の場合，ゆるやかな仮定の下で (2.3) をみたす幾何学的量子化が定義でき，ユニタリ双対 $\widehat{G}$ の一部分を構成できることが示される．詳しくは論説 [34] の定式化と用語を参照されたい．([92] の巻末では，非専門家を対象とした解説を試みた．）大まかにいえば，半単純軌道 $\mathcal{O}_\lambda \in \mathfrak{g}^*/\,\mathrm{Ad}^*(G)$ の "幾何学的量子化" として得られる既約ユニタリ表現は，

球主系列ユニタリ表現	$\cdots$	$\mathcal{O}_\lambda$ は双曲軌道
Zuckerman の導来函手加群 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$	$\cdots$	$\mathcal{O}_\lambda$ は楕円軌道
緩増加表現	$\cdots$	$\mathcal{O}_\lambda$ の次元は最大 $(= \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} - \operatorname{rank}\mathfrak{g}))$

となる．ここで，双曲軌道に関しては実偏極，楕円軌道に関しては複素偏極を用いて幾何学的量子化を行うのである．特に G が連結なコンパクトリー群の場合，$\mathcal{O}_\lambda$ は常に楕円軌道であり，しかもコンパクトケーラー多様体となる．このときは λ に "整数条件" を課した $\mathcal{O}_\lambda$ の幾何学的量子化は Borel–Weil–Bott の定理で構成できる．これは最高ウェイトを取る対応 (例 2.7) の逆に相当する．

一方，冪零軌道の "幾何学的量子化" は未だ解明されていない事が多いが，**極小冪零軌道**と "対応する" ユニタリ表現 (**極小表現**) の大域解析については，筆者自身も携わって，過去 20 年間に新しい動きがあった ([6, 56, 62], 第 4.4 節)．これについては，独立した形での解説を別の機会に譲りたい．

2.5　既約ユニタリ表現の分類: 簡約リー群の役割

リー群の構造と群拡大によるユニタリ表現の構造を解析することにより次の定理が証明される．

定理 2.10 (Duflo [14])　($\mathbb{R}$ 上の) 代数群の既約ユニタリ表現の分類は，簡約リー群のユニタリ双対の分類問題に帰着する．

冪零リー群の場合は可換リー群の群拡大を繰り返して得られるので，定理 2.10 で必要とされる簡約リー群は可換となり，ユニタリ双対の分類が完成する．実際，Kirillov の定理 (例 2.9) はこのようにして証明された．一般のリー群 G のユニタリ双対 $\widehat{G}$ の分類には G が単純リー群の場合のユニタリ双対の決定が必要となる．この未解決問題の現状は次項で扱う．

2.6　簡約リー群の既約表現の分類理論

この項では，単純リー群 (あるいは少し一般に簡約リー群) の既約表現の分類問題を紹介する．簡約リー群 G のユニタリ双対 $\widehat{G}$ を理解する際に，それより小さい集合 $\widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ (既約緩増加表現，定義 2.3) とそれより大きい集合 $\mathrm{Irr}(G)$ (既約認容表現, 定義 2.12) も合わせて扱う．

$$\widehat{G}_{\mathrm{temp}} \subset \widehat{G} \subset \mathrm{Irr}(G).$$

例 2.11　$G = \mathbb{R}$ のとき $\widehat{G}_{\mathrm{temp}} = \widehat{G} \simeq \{\chi_\xi : \xi \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$, $\mathrm{Irr}(G) \simeq \{\chi_\xi : \xi \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}$.

$\mathrm{Irr}(G)$ はユニタリ性にこだわらない "自然なクラスの既約表現" の同値類のなす集合である．その特徴づけにはいくつかの流儀がある (注意 2.14) が，ここでは，本稿の主題である分岐則にも役立つ形で $\mathrm{Irr}(G)$ の定義を簡潔に与える．まず，コンパクトなリー群の既約表現の同値類は可算個しかないこと，および，適当な位相空間 (例えば，Hilbert 空間，あるいはより一般に完備な局所凸位相線型空間) 上に定義されたコンパクトリー群の任意の連続表現は，既約表現の代数的直和を稠密な部分空間として含む (広い意味での**離散分解**) が，同じ既約表現が何回現れるか (重複度) は 0 から無限まで起

こりうることに注意しよう．

定義 2.12 (認容表現, Harish-Chandra)　簡約リー群 G の連続表現 Π が認容であるとは，G の極大コンパクト群 K への制限 $\Pi|_K$ が K の各既約表現を高々有限重複度で含むときをいう．

関数空間では L^p 関数のなす Banach 空間あるいは多様体上の C^∞ 級関数のなす Fréchet 空間など様々な位相線型空間が考えられる．これに類似して，リー群 G の連続表現 Π が Banach 空間 V 上で定義されているとき，その $\boldsymbol{C^\infty}$ **級ベクトル**のなす空間

$$V^\infty := \{v \in V : G \to V, g \mapsto \pi(g)v \text{ は } C^\infty \text{ 級写像 }\}$$

を考える．V^∞ は V の G 不変な稠密部分空間であると同時に，リー代数 $\mathfrak{g}$ の微分表現 $d\Pi$ も V^∞ 上で定義することができる．V^∞ には $\|d\Pi(X_1)\cdots d\Pi(X_k)v\|$ を半ノルム系とする Fréchet 位相が入り，この位相に関して G の連続表現 (Π^∞, V^∞) が得られる．

定義 2.13 (既約認容表現)　簡約リー群 G に対し，Banach 空間上の既約な認容表現 (Π, V) から得られる Fréchet 表現 (Π^∞, V^∞) の同値類を $\mathrm{Irr}(G)$ と表記する．

注意 2.14　(1) (Π, V) が Banach 空間に実現された既約表現ならば，次は同値である．

$$\text{普遍包絡環 } U(\mathfrak{g}) \text{ の中心が } V^\infty \text{ にスカラーで作用する} \Leftrightarrow (\Pi, V) \text{ は認容表現.} \tag{2.4}$$

(2) Casselman–Wallach の理論 [98] により，$\mathrm{Irr}(G)$ と既約な $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の同値類のなす集合との間に自然な全単射がある．

(3) $(\Pi, V) \rightsquigarrow (\Pi^\infty, V^\infty)$ の対応によってユニタリ双対 $\widehat{G}$ は $\mathrm{Irr}(G)$ の部分集合とみなせる．

簡約リー群の既約ユニタリ表現の分類：簡約リー群 G のユニタリ双対 $\widehat{G}$ の分類問題は 70 年以上の歴史をもち，例 2.8 で述べた $SL(n, \mathbb{F})$ $(\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$ の他，複素リー群 $SO(n, \mathbb{C})$ や $Sp(n, \mathbb{C})$ あるいは低ランクの実簡約リー群の場合など，特別なケースに対しては完結している．また，近年は Adams や Vogan 等による計算機を用いた “Atlas project” による $\widehat{G}$ の “記述” も進行している．しかし，単純リー群のユニタリ双対は，一般の p, q に対する不定値直交群 $O(p, q)$ などの古典型の場合でさえ，完全には解明されていない．

一方，ユニタリ双対 $\widehat{G}$ の部分集合である $\widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ (緩増加表現) は Knapp–Zuckerman によって分類が完成している (例 2.5).

簡約リー群の既約表現の分類 (ユニタリ性を課さない場合)：ユニタリ双対 $\widehat{G}$ の分類が未解決である一方，$\widehat{G}$ より大きな集合である $\mathrm{Irr}(G)$ については 1970 年代から 1980 年代初頭に分類が完成した．(すなわち，$\mathrm{Irr}(G)$ の分類は完成しているが，その中でどれが部分集合であるユニタリ双対 $\widehat{G}$ に属するかは，完全には分かっていないというのが現時点での状況である．) さて，Casselman–Wallach の理論より，$\mathrm{Irr}(G)$ の分類は既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群の分類と同等である．その分類理論には，大別して次の 3 種類の方法が知られている．

- 行列要素の漸近挙動に注目し，$\widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ の分類に帰着する解析的な手法による分類 (Langlands).
- Vogan の minimal K-type 理論と Zuckerman の導来函手加群 (Borel–Weil–Bott 理論の一般化) およびリー代数のコホモロジー (最高ウェイトの一般化) を用いる代数的な分類,
- 旗多様体上の $\mathcal{D}$-加群の理論 (Beilinson–Bernstein, Brylinski–柏原) と $K_{\mathbb{C}}$-軌道の幾何による分類.

2.7 既約表現の分類における分岐則の役割

"最小単位" という概念は視点によって変化する．既約表現は部分群から見ればもはや "最小単位" ではない．その構造を解明するのが**分岐則の理論**であるが，その一方で，第 1 節でも触れたように，分岐則の考え方は既約表現の分類理論そのものにも重要な役割を果たしている [43]．実際，Cartan–Weyl の最高ウェイト理論，Vogan の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の分類理論では，それぞれ極大トーラス，極大コンパクト部分群への制限が離散分解可能であり，(ある半順序に関する) 分岐則の "端" が分類の不変量を与えている．また，"新しい既約ユニタリ表現" が分岐則を求める過程で発見されることもある (例 1.6)．

3 局所から大域へ—不定値計量をもつ多様体の大域幾何

さて，不定符号の計量における不連続群の理論も，この 30 年間ほどで著しく発展した若い分野である．無限次元表現に対する分岐則の理論を開発するいくつかの節目において，不連続群論から得た発想が役に立った．この節では，両者が関連する部分に光を当ててみよう．

3.1 不定符号の計量の大域幾何における不思議な現象

多様体 M の接空間に非退化な 2 次形式 g_x が点 x に C^∞ 級に依存して与えられているとき，(M, g) を **擬リーマン多様体**という．(M, g) は g が正定値のときはリーマン多様体, g の固有値が一つだけ負のときは相対性理論の時空の幾何にも用いられるローレンツ多様体である．半単純対称空間 (特に既約対称空間) は簡約リー群が等長変換として推移的に作用する擬リーマン多様体の例である．

さて，20 世紀以降の幾何学，とりわけリーマン幾何学においては

$$\text{局所的性質} \rightsquigarrow \text{大域的な形}$$

というモチーフが大きな潮流となった．局所的な構造を指定したとき,「大域的にはどの程度の自由度があり，また逆に，どのような制約を受けるか?」という問題は，このモチーフの典型的なものである．

「局所から大域」の研究は，着目する局所的性質によって，それに関わる数学の分野が大きく異なる．局所的性質として "均質性" に着目すると，リー群論や整数論との結びつきが強くなり，**不連続群**とよばれる離散的な代数構造が大域的な形を統制する．(計量 g が正定値の場合の) リーマン幾何の範疇においては，1950 年代以降，リーマン対称空間・リー群論・整数論から微分幾何学・トポロジーにまたがる不連続群の研究が華やかに発展した．

一方，擬リーマン幾何においては「局所から大域へ」の潮流に乗り遅れていた感があった．擬リーマン等質多様体における不連続群の一般理論は 1989 年の論文 [31] に始まる．ここでは，リーマン幾何の "常識" からは，異常に見える現象を 3 つ紹介する (最初の 2 つは概説論文 [41] も参照されたい)．

<u>3.1.(1) 曲率と大域的な形</u>：曲率という局所的な性質が多様体の大域的な形にどのような制約を与えるかについて，リーマン多様体の古典的結果 (定理 3.1，定理 3.3) と擬リーマン多様体における現象 (定理 3.2，定理 3.4) を対比しよう．双曲多様体とは断面曲率が負で一定のリーマン多様体のことであり，**ド・ジッター多様体**，**反ド・ジッター多様体**とは断面曲率が順に正，負で一定のローレンツ多様体のことをいう．以下の定理のうち，前半の 2 つは正曲率，後半の 2 つは負曲率での対比である．

定理 3.1 (Myers)　リッチ曲率 $\geq \varepsilon (> 0)$ となる完備リーマン多様体はすべてコンパクトである．

定理 3.2 (Calabi–Markus 現象 [10])　ド・ジッター多様体はすべて非コンパクトである．

定理 3.3　すべての次元でコンパクトな双曲多様体が存在する.

定理 3.4　コンパクトな反ド・ジッター多様体は奇数次元に限って存在する.

3.1.(2) 不連続群の剛性と “変形” 可能性：不連続群の “変形可能性” について，X がリーマン対称空間の場合の古典的な剛性定理 (定理 3.5) と，X が不定符号の計量をもつ場合の “不連続群のやわらかさ” (定理 3.6) を対比しよう.

定理 3.5 (Weil の局所剛性)　3 次元以上の既約リーマン対称空間の一様格子は連続変形できない.

定理 3.6 (小林 [40])　連続変形が可能な一様格子を有する，高次元の既約対称空間が存在する.

定理 3.5 における 3 次元以上の場合の剛性定理には Selberg, Weil, Mostow, Margulis, $\cdots$ と続く発展の系譜があり，一方，2 次元の場合の一様格子の変形理論はリーマン面の**タイヒミュラー空間論**として豊かな発展の歴史をもつ．不定符号の計量における定理 3.6 は，局所半単純対称空間に対する “高次元のタイヒミュラー空間論” という新しいテーマを提供していると考えられる.

3.1. (3) スペクトルの剛性：(擬) リーマン多様体 X の不連続群 Γ が連続変形できるとき，その商空間 $\Gamma\backslash X$ 上のラプラシアンの固有値が，Γ の変形に関して不動となりうるか？この問題を X が断面曲率が -1 の定曲率空間 (**空間形**) で考える．定理 3.7 はリーマン多様体の場合の古典的結果であり，定理 3.8 は不定符号の場合 (ローレンツ多様体) における新しい現象である.

定理 3.7 (Wolpert [99])　閉リーマン面には “不動の固有値”($> 1/4$) は存在しない.

定理 3.8 (Kassel–小林 [25, 58])　3 次元のコンパクトな反ド・ジッター多様体には “不動の固有値” (> 0) が無限個存在する.

注意 3.9　定理 3.8 における “不動の固有値” の存在は，擬リーマン対称空間における “格子点の数え上げ” (第 3.3 節) と大域解析 (第 4.1 節) を用いて証明される．一方，無限次元表現の分岐則 (第 6 節) を用いて不連続群の変形に応じて “動く” 固有値 (< 0) も無限個存在することが示される ([60]).

3.2　不連続群論の発想から

前項 3.1 で述べた「擬リーマン多様体の不連続群論」の不思議な現象と，この論説の主題である「無限次元表現の分岐則」の間の (技術的あるいは思想的な) ゆるやかな関係を述べよう.

まず，群作用に関する基本的な言葉を復習する．位相群 Γ が局所コンパクト空間 X に (連続に) 作用しているとき，X の部分集合 S に対して Γ の部分集合 Γ_S を

$$\Gamma_S := \{\gamma \in \Gamma : \gamma S \cap S \neq \emptyset\}$$

と定める．S が一点集合 $\{x\}$ のときは Γ_S は部分群となる．作用に関して以下の周知の基本的な概念は，“S が小さいならば Γ_S も小さい” という性質として特徴づけられる.

定義 3.10　(1) 作用が**固有不連続** $\Leftrightarrow$ 任意のコンパクト集合 S に対して $\#\Gamma_S < \infty$.

(2) 作用が**固有** $\Leftrightarrow$ 任意のコンパクト集合 S に対して Γ_S はコンパクト.

(3) 作用が**自由** $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ に対して $\Gamma_{\{x\}} = \{e\}$.

Γ が多様体 X に固有不連続かつ自由に作用すれば，$\Gamma\backslash X$ は商位相に関してハウスドルフ空間になり，さらに商写像 $X \to \Gamma\backslash X$ が C^∞ 級写像となるような多様体の構造が $\Gamma\backslash X$ 上に一意的に入る.

逆に，多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ は M の普遍被覆空間 $\widetilde{M}$ に被覆変換群として固有不連続かつ自由に作用し，もとの多様体 M は $\pi_1(M)\backslash\widetilde{M} \simeq M$ として復元される．

不定符号の計量をもつ擬リーマン多様体 X では，その等長変換群 G の部分群 Γ に関して，一般に

$$\Gamma \text{ が } (G \text{ 内で}) \text{ 離散的} \iff \Gamma \text{ の } X \text{ への作用が固有不連続}$$

は成り立たない．これはリーマン多様体の場合との顕著な差異であり，前項 3.1 で紹介した "不思議な現象" の一つの原因となる．そこで等長変換群の作用がいつ固有不連続になるかを (形式的な定義の言い換えではなく)，深く理解することが重要となる．

簡約リー群 G の Cartan 分解 $G = K\exp(\mathfrak{a})K$ に関する Cartan 射影を $\mu\colon G \to \mathfrak{a}/W$ と表す．ここで，リー代数 $\mathfrak{g}$ の極大可換分裂代数 $\mathfrak{a}$ に関する Weyl 群を W と表記した．次の定理は，簡約部分群の作用に関する筆者の固有性の判定条件 [31] を離散部分群に拡張したものである．

定理 3.11 (固有不連続性の判定条件; 小林 [36], Benoist [3])　Γ を簡約リー群 G の離散部分群，H を G の閉部分群とする．このとき，(Γ, G, H) に関する次の 2 つの条件は同値である．

(i) Γ の G/H への作用は固有不連続である．

(ii) $\mu(H)_\varepsilon$ を $\mu(H)$ の管状近傍とするとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\mu(\Gamma) \cap \mu(H)_\varepsilon$ は有限集合である．

定理 3.11 は前項 3.1 で擬リーマン幾何における "不思議な現象" として紹介した定理 3.2, 定理 3.4 (コンパクトな定曲率空間の存在問題) および定理 3.6(不連続群の変形) の証明の鍵となる．

後述するユニタリ表現の分岐則が連続スペクトラムを含まないための判定条件 (第 6 節) は固有不連続性の判定条件 (定理 3.11) がヒントになった．定理 3.11(トポロジー) と定理 6.5(Hilbert 空間の分解) は，証明に用いる手法は大きく異なるが，いずれも，非コンパクト部分群が**あたかもコンパクト群のように良い**振る舞いをするという設定を探すという問題意識において共通性がある．[2)]

3.3　不連続群論からの応用: 定性的な定理から定量的な評価式へ

作用が固有 (不連続) である，あるいは，そうでないとき，その定性的な性質を**定量的**な評価に深化させることによって，数学の別の分野との結びつきが生まれる．その例を 2 つ挙げよう．

(1) 固有不連続性の定量的評価

離散群 Γ が X に固有不連続 (定義 3.10) に作用するならば，X の任意のコンパクト集合 S に対して

$$\#\Gamma_S < \infty$$

が成り立つ．そこで古典的な**格子点の数え上げ**を次のように非リーマン幾何で一般化する．

問題 3.12　コンパクト集合 S を次第に大きくしたときに，$\#\Gamma_S$ がどのように増大するか？

この問題 3.12 を対称空間において定式化した $\#\Gamma_S$ の漸近挙動の結果は，局所擬リーマン対称空間上のラプラシアンの "不動の固有値" の存在 (定理 3.8) の証明における鍵となった [25].

(2) 固有でない作用の定量的評価

逆に，作用が "固有でない度合" も定量的に捉えることができる．第 4.3 節では，この方向で，非可換調和解析および分岐則において微分方程式を用いない新しい発想の手法を提示する．

4　非可換調和解析の構想

局所的な解析に対比して，大域解析には多くの困難を伴う．さらに，多様体 X がコンパクトでない場合には，容易に生じる "反例" を排除するために，X における適切な「構造」が必要となる．変換群を用いた大域解析では，群 G が X の「構造」を与える役割も担う．

この節では変換群を用いた大域解析に焦点を当て，20 世紀における大きな到達点を紹介した後，新しい発展への構想を第 4.2 節–第 4.4 節で述べる．分岐則の理論への応用は第 5–8 節で扱う．

4.1　対称空間上の非可換調和解析—20 世紀の視点と到達点

多様体 X 上の大域解析において，個々の関数ではなく，関数全体のなす空間を考え，その上に定義された変換群 G の正則表現を活用するのが**非可換調和解析**である．

基本概念を復習しよう．一般に，群 G が多様体 X に作用しているとき，X 上の関数空間 $\Gamma(X)$ ($\Gamma = C^\infty$, C, $\mathcal{D}'$, $\cdots$) には自然に線型作用が定まる．すなわち，群 G の元 g による座標変換で X 上の関数 f を別の関数 $\pi(g)f := f(g^{-1}\cdot)$ に移すことによって定まる線型写像 $\pi(g)\colon \Gamma(X) \to \Gamma(X)$ を考える．π は写像の合成に関して，$\pi(g_1g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2)$ を満たすので，関数空間 $\Gamma(X)$ 上に群 G の表現 (**正則表現**) が定義される．さらに X 上に G 不変な Radon 測度が存在する場合，$\pi(g)$ は L^2 ノルムを保つので，Hilbert 空間 $L^2(X)$ 上のユニタリ表現を定義することもできる．

注意 4.1　群が多様体 X (幾何) に作用しないにもかかわらず，X 上の関数空間 (解析) には群の表現を定義できることがある．「極小表現をモチーフとする大域解析」([49]) では一歩進んで，"隠れた対称性" を関数空間に見出し，それを活用して大域解析を展開する．この新しい動向に関しては第 4.4 節で触れる．

"非可換調和解析" を説明する前に，まず，古典的な "可換な" 調和解析を復習する．ユークリッド空間上のフーリエ変換

$$\mathcal{F}\colon C_c(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}), \qquad (\mathcal{F}f)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx \tag{4.1}$$

は, 定義域を Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ に拡張でき，ユニタリ変換を定める (**Plancherel の定理**)．一方，$\pi(t)f := f(\cdot - t)$ とおくと，フーリエ変換 $\mathcal{F}$ は次の代数的関係式

$$\mathcal{F}(\pi(t)f)(\xi) = e^{-it\xi}(\mathcal{F}f)(\xi) \qquad ({}^\forall t \in \mathbb{R})$$

もみたす．これらの性質を群の表現論の立場から見ると，$G = X = \mathbb{R}$ とするとき，

代数的関係式$\cdots$フーリエ変換 $f \mapsto \mathcal{F}f(\xi)$ は加法群 G の正則表現 $C_c(X)$ から，G の既約表現 $\chi_{-\xi}\colon G \to GL(1,\mathbb{C})$, $t \mapsto e^{-it\xi}$ の表現空間 $\mathbb{C}$ への G 準同型写像である

L^2 理論$\cdots$Plancherel の定理は正則表現 $L^2(X)$ を群 G の既約ユニタリ表現に分解する

と解釈できる．変換群 G が可換群 $\mathbb{R}$ の場合，その既約表現 χ_ξ の表現空間は一次元なので，上述の群論的解釈は大げさなものに見えるかもしれない．しかし，この Weyl の視点のお蔭で，非可換調和解析は，変換群 G と多様体 X を広い形で取込み，大きな発展につながった．変換群がコンパクトならば，既約表現はすべて有限次元である．変換群 G が非可換かつ非コンパクトの場合には，群 G の「無限次元の既約表現」という強力な道具を大域解析学に用いることができる．正則表現 $L^2(X)$ を G

の既約表現に分解する公式は **Plancherel 型定理**と呼ばれる．その重要な成功例を挙げてみよう．

$X = G$ (群多様体)

Peter–Weyl (1927)	G はコンパクト群
Pontryagin (1934)	G は可換な局所コンパクト群
Gelfand 学派，Harish-Chandra (1950 年代)	G は複素半単純リー群
Harish-Chandra (1976)	G は半単純リー群

$X = G/H$ (対称空間)

大島利雄 (1980 年代)，Delorme (1996)	X は半単純対称空間

20 世紀におけるこれらの深い成果は，表現論における定理にとどまらず，関数解析や代数解析など解析学自身の進展の原動力の一つにもなった．その一方で，上述の成功例である群多様体や対称空間は「閉じた宇宙」という感もあった．実際，その大域解析で用いられた手法の多くは，これらの空間に特有の構造に立脚しており，一般化の方向を見定めるのは難しかったのである．

4.2　大域解析における表現のグリップ力—新しい視点その 1

原点に立ち返り，そもそも表現論が大域解析に役立つのか，という疑問を正面から考えてみよう．この疑問を掘り起こす指針として次の視点を提起する．

基本問題 4.2 (表現のグリップ力)　リー群 G が X に作用しているとき，X の関数空間は G の表現論によって十分に掌握できるのであろうか？

漠然とした「掌握できる」あるいは逆に「制御しきれない」という言葉を数学として定式化する必要がある．無限次元の G 加群 V には，(ときには連続濃度の) 相異なる既約部分表現が含まれ，それぞれの既約表現の重複度も有限から無限まで起こりうる．このような一般的な状況に対峙するとき，

- 異なる既約表現は無数にあっても，群作用は相異なる部分を区別できる
- 同じ既約表現が重複して現れる部分は，群作用ではそれを区別できない

という原理に着目し，重複度こそが “群のグリップ力” を測る量だと考える．群 G の既約表現 Π に対して，$C^\infty(X)$ における Π の重複度を

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\Pi, C^\infty(X)) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{4.2}$$

として定義し，基本問題 4.2 を以下のように定式化する．

問題 4.3 (大域解析における表現のグリップ力)　X をリー群 G が作用している多様体とする．

(1) 正則表現 $C^\infty(X)$ における群 G の各既約表現 Π の重複度が常に有限になるための，組 (G, X) に関する必要十分条件を与えよ．

(2) 重複度が Π に関して一様有界になるための組 (G, X) に関する条件を決定せよ．

(1) では重複度が既約表現 Π に依存することも許容しているので，(2) の方が “グリップ力が強い” といえる．問題 4.3 では群 G が推移的に作用している場合が本質的であり，以下ではこれを仮定する．群 G が簡約リー群の場合，基本問題 4.3 は小林–大島 [70] により完全に解決された．この必要十分条件を述べるため，変換群論からの言葉を準備する．

定義 4.4 (球多様体と実球多様体)　(1) 連結な複素多様体 $X_{\mathbb{C}}$ に複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ が双正則に作用し，$G_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群が $X_{\mathbb{C}}$ に開軌道を有するとき，$X_{\mathbb{C}}$ を $G_{\mathbb{C}}$ の**球多様体**という．
(2) (小林 [35]) 連結な実多様体 X に簡約リー群 G が連続に作用しているとする．G の極小放物型部分群が X に開軌道を有するとき，X を G の**実球多様体** (real spherical) という．

例 4.5　X を G を簡約リー群の等質空間，$X_{\mathbb{C}}$ をその複素化とする．
(1) 以下の基本関係が成り立つ (青本，Wolf, 小林–大島 [70]).

$$X \text{ は対称空間} \Rightarrow X_{\mathbb{C}} \text{ は球多様体} \Rightarrow X \text{ は実球多様体} \Leftarrow G \text{ はコンパクト}$$

(2) 既約な対称空間はリー代数のレベルで Berger [7] が分類した．
(3) 球多様体 $X_{\mathbb{C}}$ は，Krämer [79], Brion [9], Mikityuk [80] により分類理論が確立した．
(4) $(G \times G \times G)/\operatorname{diag} G$ は対称空間ではない．これがいつ実球多様体になるかは小林 [35] で決定された (この一般化は例 6.10 で，また，テンソル積の分解との関連は例 6.11 で後述する).

基本問題 4.2 の再定式化である問題 4.3 の解は以下の 2 つの定理で与えられる．

定理 4.6 (重複度の有限性の判定条件)　G を簡約リー群, H を簡約な代数的部分群とし, $X = G/H$ とおく．このとき組 (G, X) に関する次の 2 条件は同値である．

(i) (表現論) $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_G(\Pi, C^\infty(X)) < \infty$ $({}^\forall \Pi \in \operatorname{Irr}(G))$.

(ii) (幾何) X は実球多様体である．

論文 [70] では，定理 4.6 における (i) と (ii) が単に同値であるだけではなく，重複度の上と下からの評価式も証明された．これを用いて，重複度の一様有界性の判定条件が決定される．

定理 4.7 (重複度の一様有界性の判定条件 [70])　G を簡約リー群，H を簡約な代数的部分群とし，$X = G/H$ とおく．このとき，組 (G, X) に関する次の 3 条件は同値である．

(i) (表現論) ある定数 C が存在して $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_G(\Pi, C^\infty(X)) \leq C \quad ({}^\forall \Pi \in \operatorname{Irr}(G))$ が成り立つ．

(ii) (複素幾何) X の複素化 $X_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の球多様体である．

(iii) (環論) X 上の G 不変な微分作用素のなす環は可換である．

注意 4.8　定理 4.6 と定理 4.7 は順に問題 4.3 (1) と (2) の解を与えている．より一般に，関数空間 $C^\infty(X)$ だけでなく，超函数の空間や同変ベクトル束の切断の空間に拡張でき，さらに部分群 H が簡約であるという仮定を外した一般化も成り立つ [70, Thm. A, Thm. B]．例えば，Whittaker 模型の理論 (Kostant–Lynch, 松本久義) は H が冪零部分群の場合を対象とするが，このようなケースに対しても定理 4.6 や定理 4.7 を適用できる．

注意 4.9　定理 4.7 は，「重複度の一様有界性」という性質が，実形によらず複素化のみで決定されるという発見を含んでいる．この発見は，同種の命題が非アルキメデス的局所体上の簡約代数群でも成り立つことを予期させるものであった．最近，Sakellaridis–Venkatesh [87] はこの方向で，肯定的な結果を得ている．

定理 4.6 や定理 4.7 は，表現論の “グリップ力が強い” 大域解析の舞台が何であるかを明示する．既出の Whittaker 模型や半単純対称空間上の解析 (前項 4.1) はこの舞台の特別なケースといえる (例 4.5)．新しい舞台の 1 つとして，分岐則の問題への応用を第 6.2 節で議論する．

4.3　正則表現 $L^2(X)$ のスペクトル: 緩増加になるための幾何的条件—新しい視点その 2

前項 4.2 では，関数空間における群の “グリップ力” という観点から “重複度” に着目し，「大域解

析を深化させるのに適した枠組」として (実) 球多様体上の解析を提起した．一方，表現論の “グリップ力が弱い” 場合でも，$L^2(X)$ を “粗い立場” で解析できないだろうか？そこで，**球多様体でない場合**も含めて Plancherel 測度の台がどのような集合になるかに着目し，以下の問題を考えよう．

基本問題 4.10　簡約リー群 G が多様体 X に作用しているとき，正則表現 $L^2(X)$ が緩増加表現となるための，組 (G,X) に関する必要十分条件を決定せよ．

観察 4.11　(1) 半単純対称空間 G/H に対しては，Plancherel 型定理が知られている ([13, 83]) にも関わらず，$L^2(G/H)$ が緩増加となるための必要十分条件は一般論 [4] が確立するまで知られていなかったようである．実際，問題 4.10 に答えるためには，Plancherel 型定理に関与しうるコホモロジーの (非) 消滅条件を決定する必要があり，これはパラメータが特異な場合は容易ではない．
(2) より一般に $X_{\mathbb{C}}$ が $G_{\mathbb{C}}$ の球多様体とは限らない場合，定理 4.7 でみたように，X 上の G 不変な微分作用素環 $\mathbb{D}_G(X)$ が可換環とならず，X 上の関数を $\mathbb{D}_G(X)$ の元で同時固有関数展開するという従来の非可換調和解析の手法が有効に使えない．

上記の観察のように，基本問題 4.10 に取組むためには，手法自身を新たに開発する必要がある．新しいアプローチとして第 3 節で触れた幾何学的群論の発想を用いる．簡単なケースから始めよう．H が G のコンパクト部分群ならば，$L^2(G/H) \subset L^2(G)$ が成り立つ．このことから次のことが直ちに分かる．

例 4.12　群 G の X への作用が固有 (定義 3.10) ならば，$L^2(X)$ は緩増加となる．

従って，以下では群 G の X への作用が固有でない場合を考える．これは，X のコンパクト部分集合 S が存在して $\{g \in G : gS \cap S \neq \emptyset\}$ が非コンパクトであることを意味する．この**定性的性質**を**定量的**に取扱うため，体積 $\mathrm{vol}(gS \cap S)$ を考える．これは $g \in G$ の連続関数であり，台は非コンパクトである．G 上の関数としての体積 $\mathrm{vol}(gS \cap S)$ の漸近挙動は，作用が固有でない “度合” を捉えるものとみなせる．その考え方を追求して，X が代数多様体の場合に基本問題 4.10 は 2017 年に解決された (Benoist–小林 [4, 5])．その解を記述するために，以下の言葉を導入しよう．

定義 4.13 (表現のモーメント)　有限次元の実ベクトル空間 V 上に与えられたリー代数 $\mathfrak{h}$ の実表現 $\sigma\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ に対し，その**モーメント** ρ_V とは

$$\rho_V\colon \mathfrak{h} \to \mathbb{R}, \quad Y \mapsto V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \text{ における } \sigma(Y) \text{ の固有値の実部の絶対値の和}$$

として定義される $\mathfrak{h}$ 上の関数である．

ρ_V はリー代数 $\mathfrak{h}$ の極大可換分裂代数 $\mathfrak{a}$ への制限で一意的に決定される．さらに，制限 $\rho_V|_{\mathfrak{a}}$ は局所的に線型である．(σ, V) が随伴表現 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{h})$ の場合，$\rho_{\mathfrak{h}}|_{\mathfrak{a}}$ はルート系を用いて計算できる．

随伴表現のモーメントを用いて，基本問題 4.10 の必要十分条件を与えることができる．

定理 4.14 ($L^2(X)$ の緩増加性の判定条件 [4, 5])　G を簡約リー群，H を G の連結な閉部分群とし，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ をそれぞれのリー代数とする．このとき組 (G,H) に関する次の 2 条件は同値である．
(i) (大域解析) 正則表現 $L^2(G/H)$ は緩増加である．
(ii) (組合せ幾何) $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$．

注意 4.15　G が代数群であり X が代数多様体ならば，X が G の等質空間でない場合にも，generic な G 軌道に定理 4.14 を適用することによって基本問題 4.10 を解くことができる ([5])．

4.4　大域解析における群 G のサイズと多様体のサイズ

表現論を用いた大域解析において，さらに別の新しい視点を提起しよう．リー群 G の多様体 X への作用が高々有限個の軌道しかもたないとき (特に推移的に作用しているとき)，

$$\text{群 } G \approx \text{多様体 } X$$

と粗く捉えることにしよう．第 4.2 節では，この中で $C^\infty(X)$ における群 G の "グリップ力" に濃淡があることを明示的な形で定式化し，その必要十分条件を与えた．以下では，

(1) 群 G $\gg$ 多様体 X (G は "大きすぎて" X に非自明に作用できない)

(2) 群 G $\ll$ 多様体 X (群 G のすべての軌道の次元が X の次元より小さい)

となる場合についての表現論と大域解析の新しい可能性に触れる．

極小表現の大域解析 $\cdots$ G のサイズ $\gg$ 多様体 X のサイズの例

リー群 G の真部分群の余次元の最小値を $e(G)$ とおく．例えば，$G = GL(n, \mathbb{R})$ ならば $e(G) = n-1$ である．このとき，多様体 X の次元が $e(G)$ 未満ならばリー群 G の X への (連続な) 作用は自明なものに限る．このように，多様体 X に比べてリー群 G が "大きすぎる" と，群 G は X に幾何的には作用できない．それにも拘わらず，群 G は X 上の関数空間に自然に作用することがある．このような場合，X 上の関数空間における群 G の "グリップ力" は極めて強いものとなり，等質空間上の解析よりもさらに強力な大域解析を行えると期待される [49]．その一例は X が極小冪零軌道 (第 2.4 節) のラグランジアン部分多様体の場合であり，この視点から「極小表現をモチーフとした大域解析」が生まれた [49]．極小表現のシュレーディンガー模型 [21, 62, 68] や共形幾何による極小表現の構成 [66, 67] やフーリエ変換の変形理論 [6] などを軸に新しい方向での大域解析が活発に研究されている．

可視的作用 $\cdots$ G のサイズ $\ll$ 多様体 X のサイズの例

群が推移的に作用せず，連続無限個の軌道をもつときでも，微分方程式と合わせるとその大域解析に十分「統制」ができる設定を見出しうる．複素多様体における可視的作用の理論 [44, 53] はその方向での新しい試みである (第 6.3 節参照)．

5　分岐則の研究の構想

本稿の後半ではリー群の無限次元表現の分岐則を論じる．簡約リー群の分岐則は，その潜在的な重要性にも関わらず，部分群が非コンパクトの場合には，1990 年頃まで，特別な事例研究を除いて本格的な研究が行われていなかった．その主因は，SL_2 以外の群の分岐則を考えようとすると部分群による "グリップ力が弱くなる" 悪い現象が現れ，その先に何があるのか見通せなかったことにあったと思われる．例えば，$n \geq 3$ のとき $SL_n(\mathbb{R})$ の 2 つの主系列表現のテンソル積には，同じ既約表現が重複度無限で現れるのである．筆者は 1980 年代の後半，リーマン多様体の枠組を越えた不連続群の研究をしているときに，無限次元表現を非コンパクトな簡約部分群に制限したとき連続スペクトラムが現れず，しかも無重複に分解するという「良い分岐則」を発見した．[3)] これは従来知られていなかったタイプの分岐則であり，混然としていた表現の制限の研究の突破口となった．この例をより一般的に解明することから，スペクトルの離散性や重複度に焦点をあてて分岐則の一般理論がスタートした．その後の約 30 年間の進展を次の 3 段階に分けて説明しよう．

ステージ A: 表現の制限における一般理論 (第 6 節)

ステージ B: 分岐則の決定 (第 7 節)

ステージ C: 対称性破れ作用素の構成 (第 8 節)

ここで，A, B, C は順に

A: Abstract feature of the restriction,

B: Branching laws,

C: Construction of symmetry breaking operators,

のそれぞれの頭文字に由来する [57]．ステージ A, B, C の役割は後述の第 8.1 節と第 8.2 節において初等的な例で比較する．より専門的な解説は [57] も参照されたい．

6 分岐則の理論の構想：ステージ A

ステージ A は，表現の制限に関して，汎用性のある抽象的な理論を展開することを目指す．多様なものが混在している「表現の制限」に関する問題に鳥瞰図を与え，さらに精緻な分岐則の理論をステージ B や C で展開できる具体的な設定を抽出する役割をも担う．ステージ A では，たとえば，以下のような性質を解明する一般理論を構築することを目指す．

- (連続スペクトルの有無) ユニタリ表現の制限を既約分解したとき，その分岐則において連続スペクトルが現れるか？あるいは離散的に分解するか？ (第 6.1 節)
- (重複度) 群 G の (ユニタリとは限らない) 既約表現において部分群 G' の既約表現が現れる回数 (重複度) は有限か無限か？有限となる場合，さらに強く，一様有界性をもつか? 一層強く，無重複定理はどのような仮定の下で成り立つか？ (第 6.2 節)
- (分岐則の台) 分岐則に現れる既約表現についての性質 (たとえば第 4.3 節の分岐則への応用)．

6.1 分岐則における連続スペクトラムの存在問題

G' が簡約リー群ならば，ユニタリ表現の制限 $\Pi|_{G'}$ は直積分の概念 (第 2.3 節) を用いて

$$\Pi|_{G'} \simeq \int_{\widehat{G'}}^{\oplus} n_\Pi(\pi)\,\pi\,d\mu(\pi) \tag{6.1}$$

という形に一意的に既約表現に分解することができる (定理 2.2)．ステージ A の 1 つの課題として，まず，分岐則 (6.1) に連続スペクトルが存在するかどうかを考えてみよう．分岐則に連続スペクトルが存在する場合は，その精密な研究には解析的な手法が必要になると考えられる．一方，分岐則が離散的な場合は，純代数的な手法だけでも分岐則の問題に切り込め，さらには分岐則を計算するための組合せ論やアルゴリズムを開発する可能性も期待できる．そこで次の問題を考える．

基本問題 6.1 ([32]) 群 G の既約ユニタリ表現 Π を部分群 G' に制限したとき，G' の既約表現の離散的直和に分解するための 3 つ組 (G, G', Π) に関する判定条件を求めよ．

以下では G を簡約リー群，Π を G の既約ユニタリ表現，G' を G の簡約な部分リー群とする．

基本問題 6.1 において問いかけた「分岐則が離散分解する」例として，初等的な事例を 3 つ挙げよう．

例 6.2 Π が有限次元表現ならば，制限 $\Pi|_{G'}$ は離散的に分解する．

例 6.3 G' がコンパクトならば，制限 $\Pi|_{G'}$ は離散的に分解する．

例 6.4 ([37])　Π が最高ウェイト表現であり，さらに，$G \supset G'$ が正則型の組ならば，制限 $\Pi|_{G'}$ は離散的に分解する．

例 6.4 の用語を説明しておこう．簡約リー群 G の既約表現 Π が，(その微分表現において) 複素リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の Borel 部分代数で不変な 1 次元部分空間を含むとき，Π を**最高ウェイト表現**という．有限次元表現はすべて最高ウェイト表現であるが，G が無限次元の最高ウェイト表現をもつのは，G がエルミート型，すなわち G を極大コンパクト部分群 K で割った商空間 $X = G/K$ がエルミート対称空間の構造をもつときのみである．いま，G' を G の簡約部分群とする．$K' := G' \cap K$ が G' の極大コンパクト部分群と仮定しても一般性を失わない．G' もエルミート型であって，自然な埋め込み $G'/K' \hookrightarrow G/K$ が複素多様体の間の正則写像であるとき，$G \supset G'$ を**正則型の組**という．

最高ウェイト表現は "半ば有限次元的な" 性質を有する．一方，"真に無限次元的な" 表現を非コンパクトな部分群に制限しても離散的に分解することは起り得ないだろうというのが，長い間の専門家の "常識" であったようである．しかし，不連続群の研究の中で，離散的分岐則の例が実はもっと広範囲に存在することが発見された (1988)．この経緯は [48] を参照されたい．この特別な例を一般的な原理として明らかにする試みから離散的分岐則の理論が 1990 年代に生まれた．主要な 3 部作の論文 [33, 37, 38] は順に幾何的手法，解析的手法，代数的手法を用いて，基本問題 6.1 に答えたものである．ここでは，超局所解析の手法で得られた結果 [37] を紹介する．

定理 6.5 (ユニタリ表現の離散分解の判定条件)　Π を簡約リー群 G の任意の既約ユニタリ表現とし，G' を G の簡約部分群とする．このとき (Π, G, G') に関して (ii) $\Rightarrow$ (i) が成り立つ．

(i) 制限 $\Pi|_{G'}$ は離散的に分解し，かつ，その重複度は有限である．

(ii) $\mathrm{AS}(\Pi) \cap \mathrm{Cone}(G') = \{0\}$.

ここで，$\mathrm{AS}(\Pi)$ は表現 Π の K タイプの漸近錐 [24]，$\mathrm{Cone}(G')$ は部分群 G' から定まる錐であり，リー代数の構造論 [37]，あるいは，モーメント写像 [43, Thm 6.4.3] を用いて定義される．

注意 6.6　代数的表現論においても "表現の制限が離散分解可能である" という性質を定式化できる [38]．その判定条件は $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の圏では [38]，Verma 加群に対しては [51] で与えられた．なお，Π が G の離散系列表現の場合には，定理 6.5 において (i) $\Leftrightarrow$ (ii) が成り立つ [43].

離散的に分解する分岐則の分類理論：(G, G') が簡約対称対のとき G の既約ユニタリ表現 Π を部分群 G' に制限したときに離散的に分解するような 3 つ組 (G, G', Π) は，定理 6.5 および [38] の判定条件を計算することによって，以下の場合に分類が完成した (小林–大島 (芳)).

- Π が楕円軌道の幾何学的量子化 ($\Leftrightarrow$ $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 Π_K が Zuckerman 導来函手加群 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$) の場合 [71],
- Π が極小冪零軌道の幾何学的量子化 ($\Leftrightarrow$ Π が極小表現) の場合 [72],
- テンソル積表現 ($\Leftrightarrow$ (G, G') が $(H \times H, \mathrm{diag}(H))$ の形) の場合 [72].

6.2　分岐則の重複度

次に分岐則の重複度に着目してみよう．以下，$G \supset G'$ を簡約リー群の組とする．ここではユニタリ表現に限定せず，$\Pi \in \mathrm{Irr}(G)$ と $\pi \in \mathrm{Irr}(G')$ (定義 2.13) に対して，

$$m(\Pi, \pi) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{6.2}$$

を**重複度**と呼ぶことにする[4)]．Π が有限次元の場合と異なり，一般には (1.3) の第 2 式は成り立たない．また，Π が無限次元の場合，G' が G の部分群として極大であっても，重複度 $m(\Pi,\pi)$ が無限になってしまうという現象が自然な設定で起こりうる (たとえばテンソル積表現における重複度: 例 6.11 参照)．そこで，分岐則の重複度におけるヒエラルキーを模式的に表してみよう．

$a.$ 重複度が無限　　$b.$ 重複度が有限　　$c.$ 重複度が一様有界　　$d.$ 無重複

$a \to b \to c \to d$ となる順に部分群の "グリップ力" が大きくなり，それに応じて分岐則の解析がより精密に行えると期待される．

第 4.2 節で論じた "大域解析における表現のグリップ力" に関する判定条件 (定理 4.6) を等質空間 $(G \times G')/\operatorname{diag}(G')$ に適用して，分岐則に現れる重複度が有限になるための必要十分条件が証明される ([35, 55, 70]):

定理 6.7 (分岐則の重複度の有限性)　簡約リー群 $G \supset G'$ に関する次の 2 条件は同値である．

(i) (表現論) 任意の $\Pi \in \operatorname{Irr}(G)$ と $\pi \in \operatorname{Irr}(G')$ に対して $m(\Pi,\pi) < \infty$.

(ii) (幾何) $(G \times G')/\operatorname{diag}(G')$ は実球多様体 (定義 4.4) である．

分岐則における重複度に「一様有界性」まで課した場合には，次の特徴づけが成り立つ [35, 55, 70].

定理 6.8 (重複度の一様有界性)　簡約リー群の組 (G, G') に関する次の 3 条件は同値である．

(i) (表現論) ある定数 $C > 0$ が存在し，$m(\Pi,\pi) \le C$ $({}^{\forall}\Pi \in \operatorname{Irr}(G),\ {}^{\forall}\pi \in \operatorname{Irr}(G'))$.

(ii) (複素幾何) $(G_{\mathbb{C}} \times G'_{\mathbb{C}})/\operatorname{diag}(G'_{\mathbb{C}})$ は球多様体である．

(iii) (環論) リー代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の部分環 $U(\mathfrak{g})^{G'}$ が可換環となる．

注意 6.9　大域解析における重複度の一様有界性の判定条件 (定理 4.7) と同様に，定理 6.8 は，分岐則における重複度の一様有界性もリー代数の複素化 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'_{\mathbb{C}})$ のみで決定され，実形に依存しない，という発見を含む．これはまた，同種の結果が他の局所体上の簡約代数群で成り立つことを示唆しているが，実際，非アルキメデス的局所体上で Aizenbud–Gourevitch–Rallis–Schiffmann [2] によって定理 6.8 の (ii) $\Rightarrow$ (i) に対応する主張 (より強く $C = 1$) が証明されている．

<u>分岐則が有限重複度をもつ簡約リー群の組の分類理論</u>：定理 6.7 や定理 6.8 によって重複度という観点から分岐則が良い振舞いをする設定を検証可能な幾何的条件で抽出することができる．

(1) 定理 6.8 の判定条件 (ii) は有限次元の表現論において古くから現れ，1970 年代に分類された．すなわち，条件 (ii) をみたす $(G_{\mathbb{C}}, G'_{\mathbb{C}})$ の組は $(GL(n,\mathbb{C}), GL(n-1,\mathbb{C}))$, $(SO(n,\mathbb{C}), SO(n-1,\mathbb{C}))$, 可換リー群の組，あるいはこれらの直積と局所同型な場合に限る (Kostant, Krämer)．次の例における簡約リー群の組はその実形である．

例 6.10　$(G, G') = (GL(n,\mathbb{R}), GL(n-1,\mathbb{R}))$, $(O(p,q), O(p-1,q))$ などのとき，定理 6.8 (i) における定数 C を 1 にとることができる ([1], Sun–Zhu [93]).

(2) 定理 6.7 の判定条件 (ii) を満たす，すなわち，$(G \times G')/\operatorname{diag} G'$ が実球多様体となる対称対 (G, G') は 2013 年に分類が完成した (小林–松木 [63])．これは 1995 年に発表された次の例を一般化したものになっている．

例 6.11 (小林 [35, 55])　G を単純リー群とするとき，次の 4 つの条件は同値である．

(i) (不変三重形式) 任意の $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \operatorname{Irr}(G)$ に対して，不変三重形式の空間 $\operatorname{Hom}_G(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3, \mathbb{C})$

は有限次元である．

(ii) (テンソル積表現) 任意の π_1, π_2, $\pi_3 \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $m(\pi_1 \otimes \pi_2, \pi_3) < \infty$.

(iii) (幾何的条件) $(G \times G \times G)/\operatorname{diag}(G)$ は実球多様体である．

(iv) (分類) $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{o}(n, 1)$ $(n \geq 2)$ または G はコンパクト．

例 6.11 から，不変三重形式は $G = O(n, 1)$ の場合に精密に調べることができると期待できる．実際，この方向で，近年，不変三重形式の解析的な研究 (ステージ C) が行われている ($n = 2$ の場合，Bernstein–Reznikov [8]; n が一般の場合，Deitmar, Clerc–小林–Ørsted–Pevzner [11] など).

また，第 8.3 節で後述する共形幾何における対称性破れ作用素の構成と分類 [23, 61, 76, 78] や [16] なども定理 6.7 や定理 6.8 の枠組の中で最近進展している研究 (ステージ C) である．

重複度が無限の場合：

G の既約表現 Π とその部分群 G' の既約表現 π に対して $m(\Pi, \pi) = \infty$ となった場合，「制限 $\Pi|_{G'}$ における部分群 G' のグリップ力が弱く」なり，分岐則の問題は手に負えないのであろうか？この場合でも対称性破れ作用素 (第 8 節) の空間 $\mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi)$ を統制する構造があれば，それを手がかりに表現の制限を調べられると期待される．さて，定理 6.8 (iii) における環 $U(\mathfrak{g})^{G'}$ は $\mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi)$ に自然に作用する．$m(\Pi, \pi) = \infty$ という性質は，大まかに言えば，(表現空間への作用のレベルで)

$$G' \text{ が相対的に小さい} \iff \text{不変式環 } U(\mathfrak{g})^{G'} \text{ が大きい}$$

といえる．北川によって [28] でなされた研究は，$\mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi)$ が無限次元となる場合を含めて，それを $U(\mathfrak{g})^{G'}$ 加群として代数的に理解しようということが動機の 1 つとなっている．

6.3　可視的作用と無重複性

前項の第 6.2 節ではすべての既約表現 Π と π に関する重複度 $m(\Pi, \pi)$ の有限性や一様有界性を保証するための群の組 $G \supset G'$ に関する条件を議論した (定理 6.7 や 定理 6.8) が，より詳しく個別の既約表現に関して，分岐則の重複度を評価することを考えてみよう．

基本問題 6.12　群 G の既約表現 Π を部分群 G' に制限したとき，無重複となるような 3 つ組 (G, G', Π) を分類せよ．

“重複度” の定義によって基本問題 6.12 に 2 つの定式化が考えられる:

- ユニタリ表現の場合，直積分による既約分解 (6.1) における重複度 $n_\Pi(\pi)$,
- ユニタリとは限らない場合，対称性破れ作用素の空間の次元としての重複度 $m(\Pi, \pi)$.

この項では前者の場合を扱い，分岐則の無重複性を与える 1 つの新しい幾何的原理を紹介する．

定義 6.13 ([42])　リー群 G が複素多様体 X に双正則的に作用しているとする．G 不変な開集合 X' $(\neq \emptyset)$ と X' の反正則な微分同相写像 σ および実部分多様体 S (スライス) が存在して，

$$\sigma|_S = \mathrm{id} \quad \text{かつ} \quad G \cdot S = X'$$

をみたすとき G は X に**強可視的**に作用するという．

強可視性は表現の無重複性に関して，単純なもの (例えば 1 次元表現) から複雑なもの (例えば，無限次元の無重複表現) を系統的に生み出す “からくり” を与える．その定式化を少し簡略した形で述べてみよう．次の定理は (多くの場合に自動的に満たされる) 技術的な細かい条件を省いて，主要な仮定

と結論を記述したものである．正確な記述は [53] を参照されたい．

定理 6.14 (無重複の伝播定理)　群 G が複素多様体 X 上の正則ベクトル束 $\mathcal{V}$ に作用し，底空間 X への G の作用は強可視的と仮定する．ファイバーにおける等方部分群の等方表現が無重複ならば，正則切断の空間 $\mathcal{O}(X,\mathcal{V})$ の部分空間に実現される G の任意のユニタリ表現 Π は無重複である．

応用例を 2 つ述べよう．

例 6.15 (最高ウェイト表現)　(G,G') を対称対，Π をユニタリ最高ウェイト表現とする．Π の最小 K タイプが 1 次元ならば，制限 $\Pi|_{G'}$ の既約分解は無重複である (小林 [44])．この定理は，部分群 G' がエルミート対称空間 G/K に強可視的に作用する [46] ことと定理 6.14 から導かれる．

例 6.16 (テンソル積)　テンソル積表現 $\pi_1\otimes\pi_2$ が無重複に分解するようなユニタリ群 $U(n)$ の既約有限次元表現の組 (π_1,π_2) は，組合せ論的手法で分類された (Stembridge [91], 2001)．一方，旗多様体の強可視的作用の理論 (小林 [42]) から，このリストを幾何的に再構成することができる．可視的作用の理論による幾何学的解釈は $SO(n)$ の無重複なテンソル積表現にも拡張されている (田中 [94])．

可視的作用の分類理論: リーマン多様体に関しては等長変換群の極作用，シンプレクティック多様体に関しては Guillemin–Sternberg, Huckleberry–Wurzbacher による余イソトロピックな作用という概念があり，複素多様体における (強) 可視的な作用と，互いに近接した概念となっている ([44, Thm. 7, Thm. 8])．リーマン多様体におけるコンパクト群の極作用については，長年にわたる分類結果が知られる．一方，可視的な作用の分類理論は，十数年前に始まった若いテーマである (小林 [46, 47], 笹木 [88], 田中 [94] やそこに挙げられている文献を参照されたい)．可視的作用の分類理論は，変換群がコンパクトでない場合も無限次元表現への応用に有用である．実際，可視的作用の分類が進展するにつれて，定理 6.14 を通して過去に個別の議論で発見されていた無重複表現の族のいくつかに対し，幾何的な統一的理解が可能になると共に，新しい無重複表現が “発見” されている [44].

7　分岐則：ステージ B

ステージ A (第 6 節) によるアプリオリ評価を指針とすることによって，ステージ B では表現の制限の既約分解を求めることを目指す．この節では無重複な分岐則と離散的な分岐則という 2 つのケースで，その典型例を述べよう．

7.1　無重複表現

表現がその背後にあることを普段は意識しない古典解析にも，無重複表現が潜んでいることがしばしばある．例えば，フーリエ展開，テイラー展開，球調和関数展開，Gelfand–Tsetlin 基底による展開などは，無重複表現による既約分解とみなせる．“無重複性” が展開定理の “自然さ” の代数的構造を与えているのである．逆に表現が無重複であるときは，分岐則の明示公式 (ステージ B) や，さらにそれに立脚した解析的研究 (ステージ C) を行うのに，最も適していると考えられる．

ここでは，ステージ A で，分岐則が無重複になることが予めわかっているケースとして例 6.15 の設定を考える．さらに，(G,G') が正則型のときは，分岐則が離散的となることも予めわかっている (例 6.4)．この場合の分岐則の明示公式 (ステージ B) を述べよう．

いくつかの記号を準備する．G をエルミート型の実単純リー群 (例 6.4) とし，(G,G') を G の対合 σ によって定義された正則型の対称対とする (G' は G^σ の単位元を含む連結成分)．σ と可換な

G の Cartan 対合を θ とし，θ に対応する G の極大コンパクト部分群を K とすると，G/K はエルミート対称空間となり，G のリー代数の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は K 加群として $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_-$ と分解される．$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^{\sigma}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^{\sigma}$ を $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ に拡張する．簡約リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\sigma\theta}$ を単純リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{(i)}$ たちと可換リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{(0)}$ に直和分解し，各 i $(\neq 0)$ に対し，$\{\nu_1^{(i)}, \cdots, \nu_{k_i}^{(i)}\}$ を $\Delta(\mathfrak{p}_+ \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{(i)})(\subset (\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^{\sigma})^*)$ の強直交ルートの集合とする．

G の正則離散系列表現 Π の最小 K タイプの最高ウェイトが $\lambda \in \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$ であるとき，Π を $\Pi^G(\lambda)$ と表記する．同様に $\pi^{G'}(\mu) \in \widehat{G'}$ を $\mu \in (\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^{\sigma})^*$ に対して定義する．

定理 7.1 (Hua–Kostant–Schmid–小林)　(G, G') を正則型の対称対とする．G の任意のスカラー型正則離散系列表現 $\Pi^G(\lambda)$ に対し，以下の無重複分解が成り立つ．

$$\Pi^G(\lambda)|_{G'} \simeq \bigoplus_i \sum_{a_1^{(i)} \geq \cdots \geq a_{k_i}^{(i)} \geq 0}^{\oplus} \pi^{G'}(\lambda|_{\mathfrak{j}^\sigma} + \sum_{j=1}^{k_i} a_j^{(i)} \nu_j^{(i)}) \qquad \text{(Hilbert 直和)}. \tag{7.1}$$

注意 7.2　G' がコンパクトの場合の公式 (7.1) は，Hua (古典型の場合), Kostant(未発表), Schmid [89] による．G' が一般の場合の分岐則 (7.1) は小林 [44] で証明された．

注意 7.3　第 2.4 節の “幾何学的量子化” の逆対応として，分岐則 (7.1) の “古典的極限” は余随伴軌道に対する Corwin–Greenleaf 関数で与えられる [64].

ユニタリ表現でも最高ウェイト表現でもないが, 無重複の分岐則を与える重要なケースとして (G, G') の複素化が $(GL(n, \mathbb{C}), GL(n-1, \mathbb{C}))$ あるいは $(SO(n, \mathbb{C}), SO(n-1, \mathbb{C}))$ の場合が挙げられる (例 6.10)．特に Π と π が緩増加表現の場合には，(広い意味での) 分岐則は, Gan–Gross–Prasad 予想に関連する．第 8.3 節では，この予想と共形幾何とが結びついているケースを取り上げる．

7.2　離散的分岐則

分岐則が離散的になる場合は，代数的な手法によっても分岐則の明示公式が得られると期待される．実際 [33, 37, 38] において，離散分岐則の判定条件 (定理 6.5 参照) が確立されて以来，その枠組の中で分岐則が種々の方法で具体的に決定されてきた．その中でも Π が楕円軌道の幾何学的量子化 (第 2.4 節参照)，すなわち，その $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 Π_K が Zuckerman 導来函手加群 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ となる場合は特に重要である．Π_K が $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の場合の最初の明示的な分岐則は，(G, G') が下記の隣接する組

$$\begin{array}{ccc} O(4p, 4q) & \supset & O(4k) \times O(4p-4k, 4q) \\ \cup & & \cup \\ U(2p, 2q) & \supset & U(2k) \times U(2p-2k, 2q) \\ \cup & & \cup \\ Sp(p, q) & \supset & Sp(k) \times Sp(p-k, q) \end{array}$$

に対して与えられた (小林 [32, 33])．以降，Gross–Wallach [19], Loke, J.-S. Li, Huang–Pandžić–Savin, Ørsted–Speh [82], Duflo–Vargas [15], 関口 [90]，大島芳樹 [84], 小林 [45, 60] 等によって，離散的分岐則の明示式 (ステージ B) が大きく発展した．なお，小林 [32, 33, 60] は等質空間上の不変微分作用素環の分解定理を，Duflo–Vargas [15] は Π が離散系列表現のときに軌道法の発想を，大島 (芳)[84] は $\Pi_K = A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の一般の場合に $\mathcal{D}$ 加群の理論を用いている．

8　分岐則の理論の構想：ステージ C

ステージ C では，抽象的な分岐則 (表現の分解) だけでなく，どのように分解するか (ベクトルの分解) までを視野に入れる．そこで，群 G の既約表現 Π と部分群 G' の既約表現 π を幾何的に実現し，Π から π への G' 絡作用素 (**対称性破れ作用素**) の構成が重要となる．逆に，π から Π への G' 絡作用素 (**ホログラフィック作用素** [75]) も考えることはできるが，本稿では取扱わない．簡単な例から始めよう．

8.1　$\mathbb{R}$ の正則表現とフーリエ変換

加法群 $\mathbb{R}$ の正則表現 $L^2(\mathbb{R})$ を用いて，第 5 節におけるステージ A, B, C の役割を例示する．

ステージ A. 正則表現 $L^2(\mathbb{R})$ は連続スペクトルのみで無重複に既約分解される．

ステージ B. 正則表現 $L^2(\mathbb{R})$ は 1 次元 Hilbert 空間 $\mathbb{C}e^{ix\xi}$ の直積分 (定理 2.2) に分解される．

ステージ C. $L^2(\mathbb{R})$ の既約分解はフーリエ変換 (4.1) によって具体的に実現される．

この例は，分岐則と無関係のように見えるが，実は，$G = SL(2, \mathbb{R})$ の主系列ユニタリ表現 Π を極大ユニポテント部分群 N $(\simeq \mathbb{R})$ に制限した表現は，加法群 $\mathbb{R}$ の正則表現 $L^2(\mathbb{R})$ とユニタリ同値である (たとえば [43, Prop. 3.3.2] 参照) ので，上述のケースは $SL(2, \mathbb{R}) \downarrow \mathbb{R}$ の制限問題に関するステージ A–C と解釈することもできる．もっとも，この例に限っていえば，古典的なフーリエ変換によって，ステージ C が先に分かっており，ステージ A と B の意義は特に強調しなくてもよいであろう．

8.2　$\boldsymbol{SL(2, \mathbb{R})}$ のテンソル積表現

次に，非可換色が強いケースの中で初等的なものを選んで，分岐則のステージ A–C を例示しよう．

上半平面 $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ 上の正則関数のなす空間を $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ と表記する．このとき，群 $G = SL(2, \mathbb{R})$ は整数 $\lambda \in \mathbb{Z}$ を表現のパラメータとして $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ に以下の式で作用する．

$$(\pi_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f)(z) := (-cz + a)^{-\lambda} f\left(\frac{dz - b}{-cz + a}\right).$$

さらに，$\lambda > 1$ ならば $V_\lambda := \mathcal{O}(\mathcal{H}) \cap L^2(\mathcal{H}, y^{\lambda - 2} dxdy)$ は無限次元の Hilbert 空間となり，その上に π_λ が $G = SL(2, \mathbb{R})$ の既約かつユニタリな表現 (正則離散系列表現) を定める．

- ステージ A では，分岐則の "様相" をアプリオリに評価する (定理 6.5, 定理 6.14)：

  $\lambda', \lambda'' > 1$ ならば，テンソル積表現 $\pi_{\lambda'} \otimes \pi_{\lambda''}$ の既約分解は離散的かつ無重複である．

ここで，テンソル積の記号 $\otimes$ は Hilbert 空間としての完備化をとった事を意味する．

- ステージ B では，具体的な分岐則を決定する (Molchanov [81], Repka [86])：$\lambda', \lambda'' > 1$ のとき，

$$\pi_{\lambda'} \otimes \pi_{\lambda''} \simeq \sum_{a \in \mathbb{N}}{}^{\oplus} \pi_{\lambda' + \lambda'' + 2a} \qquad \text{(Hilbert 直和)} \tag{8.1}$$

(これは定理 7.1 の最も簡単な例の 1 つである．)

- ステージ C では，対称性破れ作用素を構成する．

λ', λ'', $\lambda''' \in \mathbb{Z}$ を与えたとき，線型写像 $R \colon \mathcal{O}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{H}) \to \mathcal{O}(\mathcal{H})$ が，

$$R(\pi_{\lambda'}(g) f_1 \otimes \pi_{\lambda''}(g) f_2) = \pi_{\lambda'''}(g) R(f_1 \otimes f_2) \quad ({}^\forall g \in G) \tag{8.2}$$

を満たすとき，R をテンソル積表現 $\pi_{\lambda'}\otimes\pi_{\lambda''}$ から $\pi_{\lambda'''}$ への**対称性破れ作用素**という．次の定理は，ウェイトの低いモジュラー形式から，ウェイトの高いモジュラー形式を構成する古典的な Rankin–Cohen の微分作用素 [12, 85] を表現論の立場で解釈したものである．

定理 8.1 (Rankin–Cohen の双線型微分作用素)　$\lambda'''-\lambda'-\lambda''$ は非負の偶数と仮定する．この値を $2a$ (a は自然数) とおくと，

$$RC_{\lambda',\lambda''}^{\lambda'''}(f_1\otimes f_2)(z):=\sum_{\ell=0}^{a}\frac{(-1)^{\ell}\Gamma(\lambda'+a)\Gamma(\lambda''+a)}{\ell!(a-\ell)!\Gamma(\lambda'+a-\ell)\Gamma(\lambda''+\ell)}\frac{\partial^{a-\ell}f_1}{\partial z^{a-\ell}}\frac{\partial^{\ell}f_2}{\partial z^{\ell}}\tag{8.3}$$

を双線型に拡張して得られる写像 $RC_{\lambda',\lambda''}^{\lambda'''}\colon\mathcal{O}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{O}(\mathcal{H})\to\mathcal{O}(\mathcal{H})$ は (8.2) を満たす．

注意 8.2　(1) 有限和 (8.3) に現れる係数は，実はヤコビ多項式の係数と一致する．このことは漸化式でも確かめられるが，“F-method”([52, 73]) を用いて内在的に証明することもできる [74].
(2) 定理 8.1 の逆は必ずしも成り立たない．すなわち，例外的なパラメータ $(\lambda',\lambda'',\lambda''')$ に対しては，Rankin–Cohen 作用素 $RC_{\lambda',\lambda''}^{\lambda'''}$ と異なる対称性破れ作用素が存在する．その完全な分類は小林–Pevzner [74] で得られた (2015 年)．その証明の手法である “Verma 加群のフーリエ変換” は，

- 超幾何微分方程式の多項式解の次元
- 完全可約でない Verma 加群同士のテンソル積の組成列の決定

を結びつける (F-method)．この手法は高次元の群の微分対称性破れ作用素の構成にも適用される．

8.3　共形幾何における対称性破れ作用素の分類理論

数学の異分野から生じた問題が，表現の分岐則の理論と結びつく別の例として，共形幾何の問題を取り上げる．リーマン多様体 X とその部分多様体 Y が与えられたとき，X 上の関数に対してある種の “共形不変性” を保存しつつ，部分多様体 Y 上の関数を対応させるという問題 (および，その一般化) を考える．このために，次の記号を準備する．

$$G:=\mathrm{Conf}(X): X\ \text{の共形変換群},$$
$$G':=\mathrm{Conf}(X;Y): G\ \text{の元で}\ Y\ \text{を保つものからなる部分群}.$$

X 上には共形変換群 G で同変な線型束 $\mathcal{L}_\lambda$ の族 $(\lambda\in\mathbb{C})$ が自然に定義される．線型束 $\mathcal{L}_\lambda$ は位相的には自明である．従って，ベクトル空間 $C^\infty(X)\simeq\Gamma(X,\mathcal{L}_\lambda)$ の上に G の表現の族 Π_λ が定義される [66]．部分群 G' は部分多様体 Y 上の誘導計量に関して共形変換群として作用するので，群 G' の表現の族 π_ν $(\nu\in\mathbb{C})$ を $C^\infty(Y)$ 上に定義することができる．これらの表現は，微分形式のなす空間 $\mathcal{E}^i(X)$, $\mathcal{E}^j(Y)$ への表現 $\Pi_\lambda^{(i)}$, $\pi_\nu^{(j)}$ に拡張される．

基本問題 8.3 (共形幾何学における対称性破れ作用素)　X をリーマン多様体，Y をその部分多様体とする．どのようなパラメータ (i,j,λ,ν) に対して

$$\pi_\nu^{(j)}(h)\circ T=T\circ\Pi_\lambda^{(i)}(h)\quad {}^\forall h\in\mathrm{Conf}(X;Y)$$

をみたす連続な作用素 $T\colon\mathcal{E}^i(X)\to\mathcal{E}^j(Y)$ は存在するか？さらにこのような T の明示式を求めよ．

基本問題 8.3 に対して，もし，(X,Y) に依存しない “普遍的な解” が存在するならば，その “解” は対称性の高いモデル空間 $(X,Y)=(S^n,S^{n-1})$ に対しても生き残っているはずである．この場合の対称性破れ作用素の構成と分類理論は最近，以下のように急速に進展し，[78] で完成した．

- ($i=j=0$; T が微分作用素の場合) Juhl は漸化式を用いて微分作用素 T の係数を完全に決定した (書籍 [23], 2009 年)．その後，異なる手法 (F-method) によって T の構成と分類に関する短い証明が与えられた (小林–Ørsted–Somberg–Souček [69])．
- ($i=j=0$; T は一般) 一般に，積分作用素や特異積分作用素を含めると，微分作用素だけの場合よりも，対称性破れ作用素は "たくさん存在する" ([54])．スカラー値 ($i=j=0$) の場合，(微分作用素と限らない) T の核超関数の構成と分類は小林–Speh (書籍 [76], 2015 年) によって証明された．
- (i, j は一般; T は微分作用素) F-method を行列値の場合に拡張することによって，行列値 (i, j は一般) の場合に T の構成と分類が小林–久保–Pevzner によって証明された (書籍 [61], 2016 年)．
- (i, j は一般; T も一般) 小林–Speh によって分類が完成した (書籍 [78], 2018 年)．

このようにして，モデル空間 $(X,Y)=(S^n,S^{n-1})$ に対する基本問題 8.3 (構成と分類) は [61] と [76] に立脚して [78] で完全に解決された．3 つの論文 [61, 76, 78] は総計 600 ページを越えるが，そこでは共形幾何のケースだけではなく，簡約リー群の組 $G\supset G'$ に対する対称性破れ作用素に関する一般論や整数論における Gross–Prasad 予想に関連した話題も含まれている (小林–Speh [77])．そこで本稿の最後にその手法と展望を表現論の観点から触れておこう．

表現論の立場から見ると，主系列表現の間の対称性破れ作用素の構成と分類を最初に与えた論文 [76] では，その主要な設定として簡約リー群の組 $(G,G')=(O(n+1,1),O(n,1))$ が選ばれているが、この組 (G,G') は定理 6.8 の条件 (ii) を満たすので，重複度の一様有界性があらかじめ保証されていることがわかる (ステージ A)．この意味で，[61, 76, 78] の諸結果は，重複度の一様有界性 (従って，特に有限性) が成り立つ場合の分岐則をステージ B と C まで歩を進めたものと解釈できる．この 3 つの論文で与えられた証明方法や考え方は，他の群の組 (G,G') に対してもかなり汎用性があると考えられるので，要点を述べる．まず、重複度の有限性判定条件を幾何的に与えた定理 6.7 より群多様体 G を直積群 $G\times G'$ の等質空間とみなした $(G\times G')/\operatorname{diag}(G')$ は実球多様体となり，特に，極小放物型部分群の軌道は有限個となる．それぞれの軌道に対して対称性破れ作用素の核超函数を構成し，解析接続や関数等式を証明する．そこでは軌道の閉包関係による stratification に応じた帰納法が用いられる．帰納法の第一段階は "微分作用素" として記述できる対称性破れ作用素であり，これは閉軌道に対応する ([73])．微分作用素として記述できる対称性破れ作用素は "系列" として現れるもの以外に "散在的に" 現れるものが存在しうる ([74, 78]) が，これらの構成と分類は筆者等が導入した F-method ([52, 54, 73]) によって，ある微分方程式系をみたす多項式 ("特殊多項式") を決定する問題に帰着され，それを解くこと [69, 61] によって分類が完成する．

謝辞: 本稿で触れた種々のプロジェクトを一緒に開発してきた共同研究者の方々，ならびに，本稿を丁寧に読んで下さった査読者の方々に感謝の意を表したい．

注　　釈

1) 群 G の既約表現 Π を部分群 G' の表現とみなしたときに既約性が保たれるというケースも稀ではあるが存在する．その幾何的な説明とこのような 3 つ組 (G,G',Π) のリストは [50] を参照されたい．
2) "見かけの類似" にとどまらず，「隠れた対称性における大域解析」という設定の下で，"固有な作用" と "離散分解する分岐則" の密接な関係が，最近，解明された (小林 [60])．
3) その幾何的な背景として，砂田利一氏の提起したスペクトル幾何の問題があった．詳しい解説は小林–小野 (薫)–砂田 [65] および [48] を参照されたい．
4) Π がユニタリ表現のとき C^∞ ベクトルのなす空間に対する重複度 $m(\Pi,\pi)$ は直積分 (6.1) における重複度 $n_\Pi(\pi)$ より大きくなりうる．

文　献

[1] A. Aizenbud, D. Gourevitch, *Multiplicity one theorem for* $(GL_{n+1}(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{R}))$, Selecta Math. (N.S.) **15** (2009), pp. 271–294.

[2] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis, G. Schiffmann, *Multiplicity one theorems*, Ann. of Math., **172** (2010), pp. 1407–1434.

[3] Y. Benoist, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. of Math., **144** (1996), pp. 315–347.

[4] Y. Benoist, T. Kobayashi, *Temperedness of reductive homogeneous spaces*, J. Eur. Math. Soc., **17** (2015), pp. 3015–3036.

[5] Y. Benoist, T. Kobayashi, Tempered homogeneous spaces, arXiv:1706.10131.

[6] S. Ben Saïd, T. Kobayashi, B. Ørsted, *Laguerre semigroup and Dunkl operators*, Compositio Mathematica, **148** (2012), pp. 1265–1336.

[7] M. Berger, *Les espaces symétriques non compacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **74** (1957), pp. 85–177.

[8] J. Bernstein, A. Reznikov, *Analytic continuation of representations and estimates of automorphic forms*, Ann. Math., **150** (1999), pp. 329–352.

[9] M. Brion, *Classification des espaces homogènes sphériques*, Compos. Math. **63** (1986), pp. 189–208.

[10] E. Calabi, L. Markus, *Relativistic space forms*, Ann. of Math. **75** (1962), pp. 63–76,

[11] J.-L. Clerc, T. Kobayashi, B. Ørsted, and M. Pevzner, *Generalized Bernstein–Reznikov integrals*, Math. Ann., **349** (2011), pp. 395–431.

[12] P. B. Cohen, Y. Manin, D. Zagier, *Automorphic pseudodifferential operators*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **26**, Birkhäuser, 1997, pp. 17–47.

[13] P. Delorme, *Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs*, Ann. of Math. (2), **147** (1998), pp. 417–452.

[14] M. Duflo, Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques, Acta Math. **149** (1982), 153–213.

[15] M. Duflo, J. A. Vargas, *Branching laws for square integrable representations*, Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci., **86** (2010), pp. 49–54.

[16] J. Frahm, Symmetry breaking operators for strongly spherical reductive pairs, preprint, arXiv:1705.06109.

[17] 藤原英徳，指数型可解リー群のユニタリ表現—軌道の方法，数学の杜 1，数学書房, 2010.

[18] B. Gross, D. Prasad, *On the decomposition of a representation of* SO_n *when restricted to* SO_{n-1}, Canad. J. Math. **44** (1992), pp. 974–1002.

[19] B. Gross, N. Wallach, *Restriction of small discrete series representations to symmetric subgroups*, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **68** (2000), Amer. Math. Soc., pp. 255–272.

[20] S. Helgason, Groups and Geometric Analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. Math. Surveys Monogr., **83** Amer. Math. Soc. 2000. xxii+667 pp.

[21] J. Hilgert, T. Kobayashi, and J. Möllers. Minimal representations via Bessel operators. J. Math. Soc. Japan **66** (2014), pp. 349–414.

[22] R. Howe, *θ-series and invariant theory*, Proc. Symp. Pure Math. **33** (1979), Amer. Math. Soc., pp. 275–285.

[23] A. Juhl, Families of conformally covariant differential operators, Q-curvature and holography. Progr. Math., **275** Birkhäuser, 2009.

[24] M. Kashiwara, and M. Vergne, K-types and singular spectrum. Noncommutative harmonic analysis, pp. 177–200, Lecture Notes in Math., **728** Springer, Berlin, 1979.

[25] F. Kassel, T. Kobayashi, *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces*, Adv. Math. **287** (2016), pp. 123–236.

[26] A. A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Uspehi Mat. Nauk **17** 1962, 57–110.

[27] A. A. Kirillov, *Lectures on the Orbit Method*, Grad. Stud. Math., **64** Amer. Math. Soc. 2004.

[28] 北川宜稔, *Algebraic structure on the space of intertwining operators*, 東大博士論文, 2016.

[29] A. W. Knapp, D. Vogan, Jr., Cohomological Induction and Unitary Representations, Princeton U.P., 1995.

[30] A. W. Knapp and G. J. Zuckerman, Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups, Ann. of Math. (2) **116** (1982), no. 2, 389–455; II. ibid., 457–501.

[31] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), pp. 249–263.

[32] T. Kobayashi, *The restriction of* $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ *to reductive subgroups*, *Proc. Japan Acad.*, **69** (1993), pp. 262–267.

[33] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of* $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ *with respect to reductive subgroups and its applications*, Invent. Math., **117** (1994), pp. 181–205.

[34] T. Kobayashi, 簡約型等質多様体上の調和解析とユニタリ表現，数学 **46** (1994), pp. 124–143; *Harmonic analysis on homogeneous manifolds of reductive type and unitary representation theory*, *Translations, Series* II, Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants, **183** (1998), Amer. Math. Soc., pp. 1–31 (英訳).

[35] T. Kobayashi, *Introduction to harmonic analysis on real spherical homogeneous spaces*, Proceedings of the 3rd Summer School on Number Theory "Homogeneous Spaces and Automorphic Forms" in Nagano (佐藤文広氏編集), 1995, pp. 22–41.

[36] T. Kobayashi, *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory **6** (1996), pp. 147–163.

[37] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups* II*—micro-local analysis and asymptotic K-support*, Ann. of Math., **147** (1998), pp. 709–729.

[38] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups* III*—restriction of Harish-Chandra modules and associated varieties*, Invent. Math., **131** (1998), pp. 229–256.

[39] T. Kobayashi, *Discrete series representations for the orbit spaces arising from two involutions of real reductive Lie groups*, *J. Funct. Anal.*, **152** (1998), pp. 100–135.

[40] T. Kobayashi, *Deformation of compact Clifford–Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds*, Math. Ann., **310** (1998), pp. 395–409.

[41] T. Kobayashi, Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces, Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond (B. Engquist and W. Schmid, eds.), Springer-Verlag, 2001, pp. 723–747, (邦訳 :「非リーマン等質空間の不連続群論」『数学の最先端　21世紀への挑戦』, 丸善, 2002, pp. 18–73).

[42] T. Kobayashi, *Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity*, Acta Appl. Math. **81** (2004), pp. 129–146.

[43] T. Kobayashi, *Restrictions of unitary representations of real reductive groups*, Progr. Math. **229** pp. 139–207, Birkhäuser, 2005.

[44] T. Kobayashi, *Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), pp. 497–549 (数理解析研究所設立 40 周年記念).

[45] T. Kobayashi, *Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs*, Progr. Math., **255** pp. 45–109, Birkhäuser, 2007.

[46] T. Kobayashi, *Visible actions on symmetric spaces*, Transform. Groups, **12** (2007), pp. 671–694.

[47] T. Kobayashi, *A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3))\backslash U(n)/(U(p) \times U(q))$*, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), pp. 669–691.

[48] T. Kobayashi, *Hidden symmetries and spectrum of the Laplacian on an indefinite Riemannian manifold*, Contemp. Math. **484** pp. 73–87, Amer. Math. Soc., 2009, Special volume in honnor of T. Sunada.

[49] T. Kobayashi, Algebraic analysis of minimal representations. Publ. RIMS **47** (2011), pp. 585–611, Special issue in commemoration of the golden jubilee of algebraic analysis.

[50] T. Kobayashi, *Branching problems of Zuckerman derived functor modules*, In: Representation Theory and Mathematical Physics (in honor of G. Zuckerman), Contemp. Math., **557** pp. 23–40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[51] T. Kobayashi, *Restrictions of generalized Verma modules to symmetric pairs*, Transform. Group, **17** (2012), pp. 523–546.

[52] T. Kobayashi, *F-method for constructing equivariant differential operators*, Contemp. Math., **598** pp. 141–148, Amer. Math. Soc., 2013. (Special volume in honor of S. Helgason.)

[53] T. Kobayashi, *Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles*, Progr. Math., **306** Birkhäuser, 2013, pp. 113–140. (Special volume in honor of J. Wolf.)

[54] T. Kobayashi, *F-method for symmetry breaking operators*, Differential Geom. Appl. **33** (2014), pp. 272–289, Special issue in honor of M. Eastwood.

[55] T. Kobayashi, *Shintani functions, real spherical manifolds, and symmetry breaking operators*, Dev. Math., **37** (2014), pp. 127–159.

[56] T. Kobayashi, *Special functions in minimal representations*, In: Perspectives in Representation Theory in honor of Igor Frenkel on his 60th birthday, Comtemp. Math., **610** pp. 253–266. Amer. Math. Soc., 2014.

[57] T. Kobayashi, *A program for branching problems in the representation theory of real reductive groups*, In: Representations of Lie Groups: In Honor of D. A. Vogan, Jr. on his 60th Birthday, Progr. Math., **312** pp. 277–322, Birkhäuser, 2015.

[58] T. Kobayashi, *Intrinsic sound of anti-de Sitter manifolds*, Springer, Proc. Math. Stat., **191** (2016), pp. 83–99.

[59] T. Kobayashi, Birth of new branching problems. 日本数学会70周年記念 総合講演・企画特別講演アブストラクト，pp.65–92, 日本数学会, 2016.

[60] T. Kobayashi, *Global analysis by hidden symmetry*, Progr. Math. **323** pp. 359–397, 2017, Birkhäuser (Special volume in honor of R. Howe).

[61] T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner, Conformal Symmetry Breaking Operators for Differential Forms on Spheres, Lecture Notes in Math., **2170** Springer, 2016, viii + 192 pages.

[62] T. Kobayashi, G. Mano, The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p, q)$, Mem. Amer. Math. Soc. (2011), **212** no. 1000, vi+132 pages.

[63] T. Kobayashi, T. Matsuki, *Classification of finite-multiplicity symmetric pairs*, Transform. Groups, **19** (2014), pp. 457–493, Special issue in honor of Dynkin for his 90th birthday.

[64] T. Kobayashi, S. Nasrin, Geometry of coadjoint orbits and multiplicity-one branching laws for symmetric pairs, Algebr. Represent. Theory **21**

(2018), pp. 1023–1036, Special Issue in honor of Alexandre Kirillov.

[65] T. Kobayashi, K. Ono, T. Sunada, *Periodic Schrödinger operators on a manifold*, Forum Math. **1** (1989), pp. 69–79.

[66] T. Kobayashi and B. Ørsted, *Analysis on the minimal representation of* $\mathrm{O}(p,q)$. I. *Realization via conformal geometry*, Adv. Math. **180** (2003), 486–512.

[67] T. Kobayashi and B. Ørsted, *Analysis on the minimal representation of* $\mathrm{O}(p,q)$. II. *Branching laws*, Adv. Math. **180** (2003), 513–550.

[68] T. Kobayashi and B. Ørsted, *Analysis on the minimal representation of* $\mathrm{O}(p,q)$. III. *Ultrahyperbolic equations on* $\mathbb{R}^{p-1,q-1}$, Adv. Math. **180** (2003), 551–595.

[69] T. Kobayashi, B. Ørsted, P. Somberg, V. Souček, *Branching laws for Verma modules and applications in parabolic geometry*, Part I, Adv. Math., **285** (2015), pp. 1796–1852.

[70] T. Kobayashi, T. Oshima, *Finite multiplicity theorems for induction and restriction*, Adv. Math., **248** (2013), pp. 921–944.

[71] T. Kobayashi, Y. Oshima, *Classification of discretely decomposable* $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ *with respect to reductive symmetric pairs*, Adv. Math., **231** (2012), pp. 2013–2047.

[72] T. Kobayashi, Y. Oshima, *Classification of symmetric pairs with discretely decomposable restrictions of* $(\mathfrak{g},K)$*-modules*, J. Reine Angew. Math., **2015** (2015), no.703, pp. 201–223.

[73] T. Kobayashi, M. Pevzner, *Differential symmetry breaking operators.* I. *General theory and F-method*, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), pp. 801–845.

[74] T. Kobayashi, M. Pevzner, Differential symmetry breaking operators. II. Rankin–Cohen operators for symmetric pairs, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016),

[75] T. Kobayashi, M. Pevzner, Inversion of Rankin–Cohen operators via holographic transform, arXiv:1812.09733.

[76] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry breaking for representations of rank one orthogonal groups, (2015), Mem. Amer. Math. Soc. **238** no.1126, 118 pages.

[77] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry breaking for orthogonal groups and a conjecture by B. Gross and D. Prasad. In: Geometric Aspects of the Trace Formula. Simons Symp., Springer, (2018), 245–266.

[78] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry Breaking for Representations of Rank One Orthogonal Groups, Part II, Lecture Notes in Math., **2234** Springer, 2018. xv+342 pages.

[79] M. Krämer, *Multiplicity free subgroups of compact connected Lie groups*, Arch. Math. (Basel) **27** (1976), pp. 28–36.

[80] I. V. Mikityuk, *Integrability of invariant Hamiltonian systems with homogeneous configuration spaces*, Math. USSR-Sbornik **57** (1987), pp. 527–546.

[81] V.F. Molchanov, Tensor products of unitary representations of the three-dimensional Lorentz group. Math. USSR, Izv. **15** (1980), pp. 113–143.

[82] B. Ørsted, B. Speh, *Branching laws for some unitary representations of* $SL(4,\mathbb{R})$, SIGMA **4** (2008), doi:10.3842/SIGMA.2008.017.

[83] T. Oshima, *Harmonic analysis on semisimple symmetric spaces*, Sugaku Expositions, **15** (2002), pp. 151–170, Amer. Math. Soc.

[84] 大島芳樹, *Discrete branching laws of Zuckerman's derived functor modules*, 東京大学，博士論文, 2013.

[85] R. A. Rankin, *The construction of automorphic forms from the derivatives of a given form*, J. Indian Math. Soc., **20** (1956), pp. 103–116.

[86] J. Repka, *Tensor products of holomorphic discrete series representations*, Can. J. Math. **31** (1979), pp. 836–844.

[87] Y. Sakellaridis and A. Venkatesh, Periods and Harmonic Analysis on Spherical Varieties, Asterisque, 2018.

[88] 笹木集夢, 無重複表現と可視的作用, 数学, in preparation.

[89] W. Schmid, *Die Randwerte holomorphe Funktionen auf hermetisch symmetrischen Raumen*, Invent. Math. **9** (1969–70), pp. 61–80.

[90] H. Sekiguchi, *Branching rules of singular unitary representations with respect to symmetric pairs* (A_{2n-1},D_n), Internat. J. Math. **24** (2013), no. 4, 1350011, 25 pp.

[91] J. R. Stembridge, *Multiplicity-free products of Schur functions*, Ann. Comb., **5** (2001), pp. 113–121.

[92] 杉浦光夫, ユニタリ表現入門，東京図書，2018.

[93] B. Sun, C.-B. Zhu, *Multiplicity one theorems: the Archimedean case*, Ann. of Math., **175** (2012), pp. 23–44.

[94] 田中雄一郎, *Visible actions of reductive algebraic groups on complex algebraic varieties*, 東京大学，博士論文, 2015.

[95] 辰馬伸彦，位相群の双対定理 (紀伊國屋数学叢書 **32**) 1994 年.

[96] D. A. Vogan, Jr., Representations of Real Reductive Lie Groups, Progr. Math., **15** Birkhäuser, 1981.

[97] D. A. Vogan, Jr., *Unitarizability of certain series of representations*, Ann. of Math., **120** (1984), pp. 141–187.

[98] N. R. Wallach, Real reductive groups. I, II, Pure and Applied Mathematics, **132** Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988; ibid, **132**-II, 1992.

[99] S. A. Wolpert, *Disappearance of cusp forms*

in special families, Ann. of Math. **139** (1994), pp. 239–291.
[100] H.-W. Wong, Dolbeault cohomological realization of Zuckerman modules associated with finite rank representations. J. Funct. Anal. **129** (1995), no. 2, 428–454.

(年 月 日提出)

(こばやし としゆき・東京大学大学院数理科学研究科，Kavli IPMU (WPI))