擬リーマン局所対称空間の大域幾何と解析
Global geometry and analysis on pseudo-Riemannian locally symmetric spaces

小林俊行

東京大学大学院数理科学研究科・カブリ数物連携宇宙研究機構
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~toshi/

表現論シンポジウム
鳥取, 2018 年 11 月 13–16 日

幾何学—局所から大域へ

基本問題 (微分幾何)

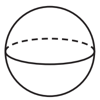
$\underbrace{\text{局所 幾何構造}}_{\text{A}}$ がどのように

多様体の $\underbrace{\text{大域的な 性質}}_{\text{B}}$ に影響を与えるか?

A (局所的性質) : 曲率，局所的均質構造，. . .

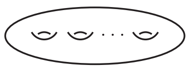
B (大域的性質): 体積, コンパクト性，基本群, . . .

曲率 (局所的性質) $\rightsquigarrow$ 大域的性質?

- リーマン幾何の場合
  - 正曲率 

    例. Bonnet–Myers の定理 (大域的制約)
  - 負曲率

    例. 双曲幾何

$\Sigma_g =$  $\simeq \pi_1(\Gamma_g)\backslash SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$

- ローレンツ幾何の場合
  - 正曲率

    例. ド・ジッター多様体 に対する Calabi–Markus 現象
  - 負曲率

    例. コンパクトな 反ド・ジッター多様体 の存在問題

リーマン幾何の “正値性” を越えて

M : n 次元多様体

定義 (M,g) が 擬リーマン多様体 であるとは
$g\colon T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$
が $x \in M$ に C^∞ 級に依存する
非退化対称双線型形式であるときをいう.

(p,q): g の符号は局所定数, $p+q=n$
$q=0$ のとき (M,g) を リーマン多様体,
$q=1$ のとき (M,g) を ローレンツ多様体 という.

局所等質空間 $\Gamma\backslash X = \Gamma\backslash G/H$

設定 $\underset{\text{離散部分群}}{\Gamma} \subset \underset{\text{リー群}}{G} \supset \underset{\text{閉部分群}}{H}$

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & \text{被覆写像} \swarrow & & \searrow & \\ \Gamma\backslash G & & & & G/H = X \\ & \searrow & p_\Gamma & \swarrow & \\ & & \Gamma\backslash G/H = \Gamma\backslash X & & \end{array}$$

- $\Gamma\backslash G$ および $X = G/H$ は C^∞ 多様体である (easy).
- しかし，商空間 $\Gamma\backslash X = \Gamma\backslash G/H$ はハウスドルフとは限らない．ただし，Γ が X に固有不連続かつ自由に作用する場合は，$\Gamma\backslash G/H$ は (ハウスドルフな) C^∞ 多様体となり，p_Γ は被覆写像となる．

定義． $\Gamma\backslash X \simeq \Gamma\backslash G/H$ を G/H の Clifford–Klein 形 という．

擬リーマン局所等質多様体

離散等長部分群 $\rightleftarrows$ 固有不連続な等長作用

（擬リーマン多様体の場合）

基本問題

局所 ~~幾何~~ 均質 構造がどのように，多様体の大域的性質に影響するか?

新しい現象と手法は？

離散群によるコンパクトハウスドルフ商の存在問題

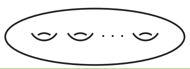
$\underset{\text{離散}}{(\Gamma \subset)} \quad \underset{\text{リー群}}{G} \supset \underset{\text{閉部分群}}{H}$

問題 (K- ’87)　どのようなリー群の組 (G, H) に対して以下の性質をみたす G の離散部分群 Γ が存在するか?
- $\Gamma \curvearrowright G/H$ は固有不連続かつ自由,
- $\Gamma\backslash G/H$ はコンパクト (あるいは体積有限).

古典的な場合: H はコンパクト
$\Rightarrow$ 数論的部分群の理論により G が線型簡約群ならばこのような Γ は常に存在する (Borel–Harish-Chandra, Mostow–玉河)

Ex　$G/H = SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ (Poincaré 上半平面)

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$\Gamma\backslash G/H \simeq$  $(g \geq 2)$

離散群によるコンパクトハウスドルフ商の存在問題

$\underset{\text{離散}}{(\Gamma \subset)} \quad \underset{\text{リー群}}{G} \supset \underset{\text{閉部分群}}{H}$

問題 (K- ’87)　どのようなリー群の組 (G, H) に対して以下の性質をみたす G の離散部分群 Γ が存在するか?
- $\Gamma \curvearrowright G/H$ は固有不連続かつ自由,
- $\Gamma\backslash G/H$ はコンパクト (あるいは体積有限).

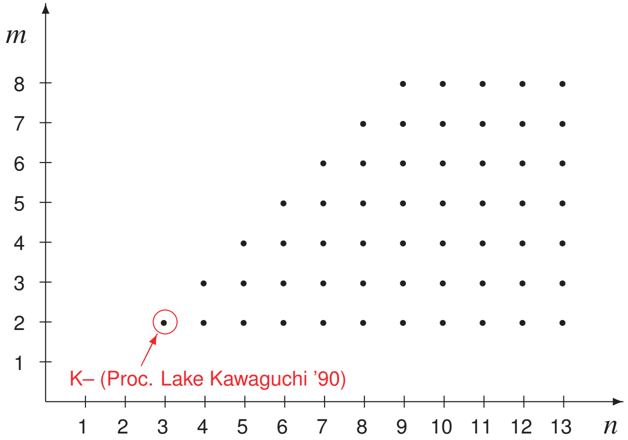
“古典的” ではない場合: H は 非コンパクト.

$\Rightarrow$ 状況は大きく異なる

予想　$n > m$ のとき
$SL(n)/SL(m)$ にはこのような Γ は存在しない．

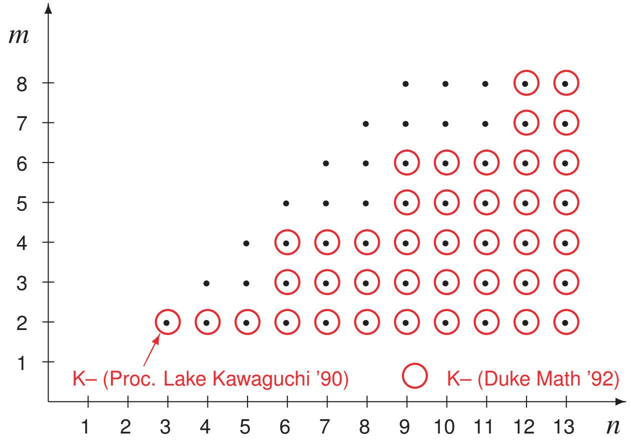
$SL(n)/SL(m)$ のコンパクト商の非存在予想

コンパクト商の非存在予想が証明されたケース (1990–2017):



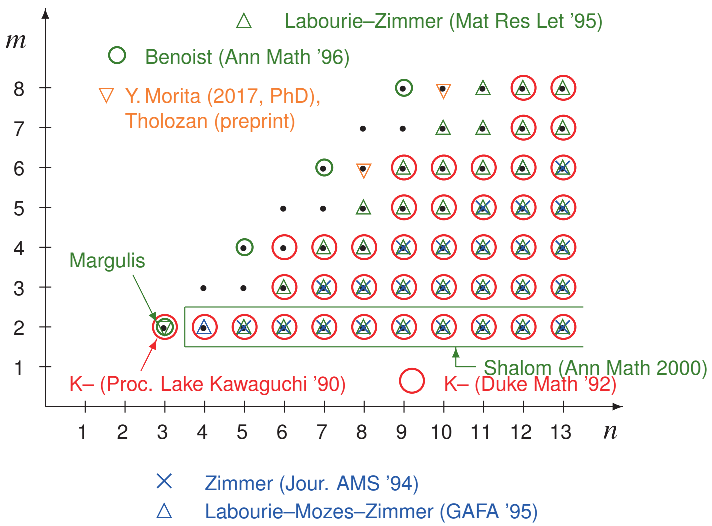
$SL(n)/SL(m)$ のコンパクト商の非存在予想

コンパクト商の非存在予想が証明されたケース (1990–2017):



$SL(n)/SL(m)$ のコンパクト商の非存在予想

コンパクト商の非存在予想が証明されたケース (1990–2017):



コンパクト商の非存在予想の証明の手法

予想 $SL(n)/SL(m)$ $(n > m > 1)$ には不連続群による
コンパクト商は存在しない.

K–	作用の固有性判定条件 + コホモロジーによる障害	$n > \frac{3}{2}m + 2$
Zimmer	Ratner の軌道閉包定理	$n > 2m$
Labourier–Mozes–Zimmer		
	エルゴード作用	$n \geq 2m$
Benoist	固有性判定条件	$n = m + 1,\ m$ even
Margulis	ユニタリ表現論	$(n \geq 5, m = 2)$
Shalom	ユニタリ表現論	$n \geq 4, m = 2$

基礎概念の復習 ... 固有な作用

$$\underset{\text{位相群}}{L} \overset{\text{作用}}{\curvearrowright} \underset{\text{局所コンパクト空間}}{X}$$

$$\begin{array}{ccc} X & & L \\ \text{部分集合} \cup & \rightsquigarrow & \cup \ \text{部分集合} \\ S & & L_S := \{\gamma \in L : \gamma S \cap S \neq \emptyset\} \end{array}$$

定義. $L \curvearrowright X$ が 固有 (proper) $\iff$ L_S はコンパクト ($^\forall S$: コンパクト)

$L \curvearrowright X$ が 自由 (free) $\iff$ $\# L_{\{p\}} = 1$ $(\forall p \in X)$

“作用” の性質と “群自身” の性質を分類する

作用の性質	固有不連続な作用
	‖
作用の性質	固有な作用
	+
	群が離散位相をもつ

群作用の基礎概念の差異を与える微妙な例

$$L \curvearrowright X$$

(A) 自由な作用 $\not\Rightarrow$ 固有な作用

(B) すべての軌道が閉 $\not\Rightarrow$ $L \backslash X$ はハウスドルフ

$L \subset \underset{\text{リー群}}{G} \supset H$ の設定で $X = G/H$

$L \simeq \mathbb{R}^k$ の場合でも (A), (B) いずれにも 反例 がある.

例 4. $(G = SL(2, \mathbb{R}))$ (例 3 の “連続類似”)

$L = \mathbb{R} \curvearrowright X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (ローレンツ計量を保つ作用)

Ex. (G = 単連結な冪零リー群)

$L = \mathbb{R}^2 \curvearrowright X = \mathbb{R}^5$ (冪零多様体)

(吉野 2004, リップスマン予想の反例)

鍵となる問題:不連続性の判定条件

設定

$$\underset{\text{~~離散~~ 部分群}}{L} \subset G \supset \underset{\text{閉部分群}}{H}$$

基本問題

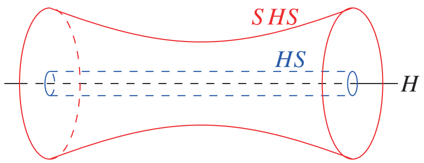
L の G/H への作用が ~~固有不連続~~ 固有 であるかどうかを 有効に 判別するための手法を見つけよ.

$\pitchfork$ と $\sim$ (定義)

$$L \quad \subset \quad G \quad \supset \quad H$$

アイディア: L と H が部分群であることを 忘れる

定義. (K– 1996)
1) $L \pitchfork H \iff \overline{L \cap SHS}$ がコンパクト
   ($^\forall$ コンパクト部分集合 $S \subset G$)
2) $L \sim H \iff L \subset SHS$ かつ $H \subset SLS$ となる
   コンパクト部分集合 S ($\subset G$) が存在する.



$\pitchfork$ と $\sim$ (意味)

$$L \quad \subset \quad G \quad \supset \quad H$$

G はリー群, L と H は単なる閉部分集合

1) $L \pitchfork H \iff$ 作用が固有であることの一般化
2) $L \sim H \iff$ 思考の節約

$\pitchfork$ の意味: L と H が閉部分群の場合

$L \pitchfork H \iff L \curvearrowright G/H$ が固有 (proper)

$\sim$ は $\pitchfork$ を判別する目的において, 思考の節約になる同値関係

$$H \sim H' \implies \boxed{H \pitchfork L \iff H' \pitchfork L}$$

$\pitchfork$ と $\sim$ の判定条件 (簡約リー群の場合)

G: 実簡約リー群
$G = K\exp(\mathfrak{a})K$: カルタン分解
ν: $G \to \mathfrak{a}$: カルタン射影 (Weyl 群の共役を除いて一意.)

例 6.
$$\begin{aligned} \nu: \quad GL(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^n \\ g &\mapsto \tfrac{1}{2}(\log\lambda_1, \cdots, \log\lambda_n) \end{aligned}$$
ここで, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \,(>0)$ は ${}^t gg$ の固有値.

$$G = GL(n,\mathbb{R})$$
$$K = O(n)$$
$$\mathfrak{a} \simeq \mathbb{R}^n$$
ワイル群 $\simeq \mathcal{S}_n$

$\pitchfork$ と $\sim$ の判定条件 (簡約リー群の場合)

G: 実簡約リー群
$G = K\exp(\mathfrak{a})K$: カルタン分解
ν: $G \to \mathfrak{a}$: カルタン射影 (Weyl 群の共役を除いて一意.)

定理 A (K– 1989, 1996, Benoist 1996)
1) $L \sim H$ in $G \iff \nu(L) \sim \nu(H)$ in $\mathfrak{a}$.
2) $L \pitchfork H$ in $G \iff \nu(L) \pitchfork \nu(H)$ in $\mathfrak{a}$.

右辺は「可換」な世界

特別な場合は以下を含む
(1)'s $\Rightarrow$: 行列の摂動における固有値の変動の 一様評価.
(2)'s $\Leftrightarrow$: 固有不連続性 の判定条件.
- L, H が簡約部分群, K– '89
  $\Rightarrow$ 応用例 $SL(2,\mathbb{R})$ の固有な作用,
  (奥田, Bocheński, Jastrzębski, Tralle)
- 定性的な判別条件 (定理 A)
  $\Rightarrow$ 定量的な評価 (F. Kassel–K, 2016)

擬リーマン多様体の空間形—局所的に同じ “曲がり方”

(M, g) : 擬リーマン多様体,
(以下，測地的完備と仮定する)

定義. (M, g) が 空間形
$\iff$ 断面曲率 κ が一定

リーマン多様体・ローレンツ多様体の空間形

空間形は次のパラメータを含む ($n = p + q$ は多様体の次元):
擬リーマン計量 g の符号 (p, q)
曲率の符号 $\kappa \in \{+, 0, -\}$

例 $q = 0$ (リーマン多様体)

球面 S^n	$\mathbb{R}^n$	双曲空間
$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$

例 $q = 1$ (ローレンツ多様体)

ド・ジッター空間	ミンコフスキー空間	反ド・ジッター空間
$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$

定曲率空間の大域的な形

擬リーマン多様体の 空間形問題

局所的性質
擬リーマン多様体の符号 (p, q), 曲率 $\kappa \in \{+, 0, -\}$

$\Downarrow$

大域的性質
- コンパクト形は存在するか？
- どのような群が基本群として実現されるか?

擬リーマン多様体に対する空間形の大域的問題

局所的仮定
(p, q): 擬リーマン計量の符号 ($p \geq q$), 曲率 $\kappa \in \{+, 0, -\}$

- $\kappa > 0$: Calabi–Markus 現象 (一般の場合の解決: K–, 1989)
  (Calabi, Markus, Wolf, Wallach, Kulkarni, K–)
- $\kappa = 0$: Auslander 予想
  (Bieberbach, Auslander, Milnor, Margulis, Goldman, Abels, Soifer, . . .)
- $\kappa < 0$: コンパクト形の存在問題
  (Kulkarni, K-1994, Tholozan, Morita)
  $(p, q) = (2, 1), (4, 1), (6, 1), (8, 1), (10, 1), \ldots,$
  $(4, 3), (8, 3), (12, 3), (16, 3), (20, 3), \ldots,$
  $(8, 7)$

ローレンツ多様体のコンパクトな定曲率空間の存在問題

Riemannian case

Compact space forms always exist:

- $\kappa > 0$ S^n
- $\kappa = 0$ $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$
- $\kappa < 0$ compact hyperbolic manifolds exist

$\Longleftrightarrow$ Cocompact discrete subgps of $O(n,1)$ exist

$(\underbrace{\text{Siegel, Borel}}_{\text{arithmetic}}, \underbrace{\text{Makarov, Vinberg, Johnson–Millson, Gromov–Piateski-Shapiro}}_{\text{non-arithmetic}} \cdots)$

Lorentzian case

Compact space forms of dimension n

- $\kappa > 0$ (de Sitter mfd) 決して存在しない (Calabi–Markus 現象)
- $\kappa = 0$ 常に存在する
- $\kappa < 0$ (anti-de Sitter mfd) 存在 $\Leftrightarrow$ n は奇数

擬リーマン多様体のコンパクトな定曲率空間の存在問題

- 符号 (p,q) の擬リーマン多様体に対して

定理 B　以下の条件の下で負の定曲率のコンパクト空間形が存在する

① q 任意, $p=0$　　($\leftrightarrow \kappa > 0$) ($\Leftrightarrow$ 球面幾何)
② $q=0$,　p 任意　　(双曲多様体)
③ $q=1$,　$p \equiv 0 \mod 2$ ⎫ (反ド・ジッター多様体)
④ $q=3$,　$p \equiv 0 \mod 4$ ⎬ (擬リーマン多様体)
⑤ $q=7$,　$p=8$ ⎭

Proof (1950–1994)

(①② (リーマン多様体); ③④⑤ (擬リーマン多様体) Kulkarni '81, K– '94)

予想 (K–)　定理 B は必要十分条件を与えている．

予想に関する部分的結果:

以下の場合には負曲率のコンパクトな空間形が存在しない

$p \le q$ (Calabi–Markus 現象 '62, 一般の場合の必要十分条件 K– '89),

or p は奇数 (コホモロジー的障害, K–小野 '90, 森田 '17)

擬リーマン多様体のコンパクトな定曲率空間の存在問題

- 符号 (p,q) の擬リーマン多様体に対して

定理 B　以下の条件の下で負の定曲率のコンパクト空間形が存在する

① q 任意, $p=0$　　($\leftrightarrow \kappa > 0$) ($\Leftrightarrow$ 球面幾何)
② $q=0$,　p 任意　　(双曲多様体)
③ $q=1$,　$p \equiv 0 \mod 2$ ⎫ (反ド・ジッター多様体)
④ $q=3$,　$p \equiv 0 \mod 4$ ⎬ (擬リーマン多様体)
⑤ $q=7$,　$p=8$ ⎭

Proof (1950–1994)

(①② (リーマン多様体); ③④⑤ (擬リーマン多様体) Kulkarni '81, K– '94)

cf. Cartan 運動群による類似問題は完全に解決した

$$G/H = O(p,q+1)/O(p,q) \rightsquigarrow G_\theta/H_\theta$$

$G_\theta = K \ltimes \mathfrak{p}$　$G = K\exp(\mathfrak{p})$ の Cartan 運動群

Thm (K–吉野 '06) G_θ/H_θ がコンパクト Clifford–Klein 形をもつための必要十分条件 は $q < p$ の Radon–Hurwitz 数 となることである．

Clifford–Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ の構成のアイディア (定理 B の証明)

$\underset{\text{}}{\Gamma} \underset{\text{離散部分群}}{\subset} \underset{\text{簡約リー群}}{G} \supset \underset{\text{簡約部分群}}{H}$

復習　$\Gamma\backslash G/H$ はハウスドルフになるとは限らない．

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \subset & L \\ \text{連結部分群} & & \cap \\ & & G \end{array} \quad \overset{\text{等長}}{\curvearrowright} \quad \begin{array}{c}\text{擬リーマン} \\ X = G/H\end{array}$$

固有

- H が 非コンパクト ならば，G の $X = G/H$ への作用は固有 (proper) でない．

Step 1　X に固有に作用する L を見つける ($\Leftarrow$ 固有性の判別条件).

Step 2　連結部分群 L の中で捻れ元のない離散部分群をとる．

Clifford–Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ の変形

アイディア

$$\underset{\text{固定}}{\Gamma} \ \underset{\text{離散}}{\overset{\boxed{\varphi}}{\hookrightarrow}} \ \underbrace{G \supset H}_{\text{固定}}$$

> 単射準同型 $\boxed{\varphi}$ を動かす
> $\rightsquigarrow$ $\boxed{\varphi(\Gamma)}\backslash G/H$ は $\Gamma\backslash G/H$ の変形??

- 2 つの問題点
  — 非自明な変形 $\boxed{\varphi}$ は存在するか?;
  — φ を動かしたとき，作用の固有不連続性は保たれるか?

3 次元反ド・ジッター多様体の変形に関する Goldman の予想

$X_\Gamma = \Gamma\backslash X : X = G/H$ の標準的 Clifford–Klein 形
$\cdots \underset{\text{離散部分群}}{\Gamma \subset} \underset{\text{固有}}{L \curvearrowright} G/H$
内部自己同型 $\mathrm{Int}(G)$ を除いて G 内で Γ を変形する．

> <u>問題</u>　Γ を少し変形したとき X_Γ は多様体であり続けるか?

> <u>予想</u> (Goldman 1985)　$X = \mathrm{Ad}S^3$ のときは正しそうである．

> <u>定理</u> (K–, Math Ann 1998)　Goldman の予想は正しい．

$\rightsquigarrow$ 高次元の X_Γ に対する "変形理論"

$\Rightarrow$ Γ を曲面群 $\pi_1(\Sigma_g)$ とするとき 3 次元反ド・ジッター多様体 X_Γ の非自明な変形空間は $12g - 12$ 次元となる．

局所等質空間 $\Gamma\backslash X = \Gamma\backslash G/H$ (観察)

> <u>設定</u>　$\underset{\text{離散}}{\Gamma} \subset \underset{\text{リー群}}{G} \supset \underset{\text{閉部分群}}{H}$

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "\text{被覆写像}"'] \arrow[dr] & \\
\Gamma\backslash G \arrow[dr] & & G/H = X \arrow[dl, "p_\Gamma"'] \\
 & \boxed{\Gamma\backslash G/H = \Gamma\backslash X} &
\end{tikzcd}$$

- Γ が X に固有不連続かつ自由に作用すると仮定する．このとき，商 $\boxed{\Gamma\backslash G/H = \Gamma\backslash X}$ は C^∞ 多様体であり，p_Γ は被覆写像となる．

> <u>観察</u>　被覆写像 $p_\Gamma : X \to \boxed{\Gamma\backslash X}$ によって，局所等質空間 $\Gamma\backslash X = \Gamma\backslash G/H$ は $X = G/H$ 上の任意の G 不変な幾何構造を受け継ぐ．

$\Gamma\backslash X = \Gamma\backslash G/H$ 上のラプラシアン $\Box_{\Gamma\backslash X}$

> <u>観察</u>　被覆写像 $p_\Gamma : X \to \boxed{\Gamma\backslash X}$ によって，局所等質空間 $\Gamma\backslash X = \Gamma\backslash G/H$ は $X = G/H$ 上の任意の G 不変な幾何構造を受け継ぐ．

$G \supset H$ を実簡約リー群の組とする．
$\Longrightarrow$ Killing 形式から $X = G/H$ には G 不変な擬リーマン多様体の構造が入る．
$\Longrightarrow$ 商空間 $\boxed{\Gamma\backslash X} = \Gamma\backslash G/H$ もこの擬リーマン構造が受け継がれる．

> $\Box := \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$　(ラプラシアン)

明らかに，$\Box_X \circ p_\Gamma^* = p_\Gamma^* \circ \Box_{\Gamma\backslash X}$

> <u>例 7</u>　(反ド・ジッター多様体) $(G, H) = (O(n, 2), O(n, 1))$
> $\Longrightarrow$　$X = G/H$ はローレンツ多様体となり，ラプラシアン <u>$\Box_X$ は双曲型作用素となる．</u>

$\Gamma\backslash X = \Gamma\backslash G/H$ 上のスペクトル解析

$$\begin{array}{rccc} & X & = & G/H \\ \text{被覆写像} & \downarrow & & \\ & \Gamma\backslash X & = & \Gamma\backslash G/H \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{D}_G(X) & \ni & D \\ \rotatebox{90}{$\rightarrowtail$} & & \downarrow \\ \mathbb{D}(\Gamma\backslash X) & \ni & D_\Gamma \end{array}$$

<u>基本問題</u>　X 上の G 不変な微分作用素 D たちの同時固有関数 $f \in C^\infty(\Gamma\backslash X)$ (あるいは $L^2(\Gamma\backslash X)$ 等) を構成し，
その同時固有値を理解したい:

$$D_\Gamma f = \lambda(D) f \qquad ({}^\forall D \in \mathbb{D}_G(X)).$$

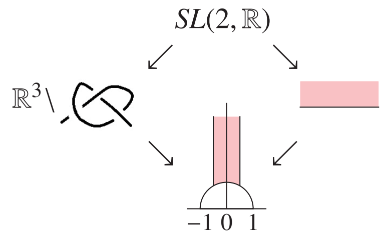
ここで $\lambda : \mathbb{D}_G(X) \to \mathbb{C}$ は環準同型写像.

$\lambda(D)$: X 上の G 不変な微分作用素環 $\mathbb{D}_G(X) \ni D$ の同時固有値
この定式化は $\mathbb{D}_G(X)$ が可換環の場合　(たとえば，$X = G/H$ が対称空間) の場合に，より意義がある.

不定符号計量における $\Gamma\backslash G/H$ 上のスペクトル問題

$$\underset{\text{離散部分群}}{\Gamma} \subset \underset{\text{リー群}}{G} \supset \underset{\text{部分群}}{H} \qquad SL(2,\mathbb{Z}) \subset SL(2,\mathbb{R}) \supset SO(2)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \Gamma\backslash G & & & & G/H \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \Gamma\backslash G/H & & \end{array}$$



特別な場合でも既に深く豊かである.

- $\Gamma = \{e\} \cdots G/H$ 上の非可換調和解析
  Gelfand, Harish-Chandra, S. Helgason, Flensted-Jensen, 大島, Delorme, ...
- H コンパクト, Γ 数論的部分群 $\cdots$ 保型形式 (local theory)
  Siegel, Selberg, Piateski-Shapiro, Langlands, Arthur, Sarnak, Müller, ...
- $G = \mathbb{R}^{p,q}$ (可換で不定値計量), $\Gamma = \mathbb{Z}^{p+q}$, $H = \{e\}$
  Oppenheim conjecture, Dani–Margulis, Ratner, Eskin, Mozes, ...

不定符号計量における $\Gamma\backslash G/H$ 上のスペクトル問題

$$\underset{\text{離散部分群}}{\Gamma} \subset \underset{\text{リー群}}{G} \supset \underset{\text{部分群}}{H}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \Gamma\backslash G & & & & G/H \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \Gamma\backslash G/H & & \end{array}$$

<u>新しい試み</u>: G が非可換かつ H が非コンパクトかつ Γ は非自明.
この一般的な設定で $\Gamma\backslash G/H$ 上のスペクトル解析は？

新たに生じる困難

- (<u>幾何</u>) 土台となる "良い幾何" $\Gamma\backslash G/H$ は存在するか?
  リーマン幾何を越えた，局所から大域への問題
- (<u>解析</u>) ラプラシアンは楕円型でなく， Weyl の法則も不成立.
- (<u>表現論</u>) $\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトでも $\Gamma\backslash G$ の体積は無限となる.

反ド・ジッター多様体の "普遍的な音色"

<u>定義</u>　M: <u>反ド・ジッター多様体</u>
$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 負の定曲率 ($\equiv -1$) のローレンツ多様体

古典的なリーマン多様体の場合では，ラプラシアンの固有値 ($\neq 0$) はタイヒミュラー空間上の関数として定数ではありえない. しかし，擬リーマン多様体では，次の新しい現象が最近発見された:

<u>定理 C</u> (F. Kassel–K, <u>Adv Math 2016</u>)
3 次元のコンパクトな反ド・ジッター多様体の
ラプラシアン $\square$ には，可算無限個の '安定' 固有値 が存在する.

'安定' $\underset{\text{def}}{=}$ 反ド・ジッター多様体の <u>変形</u> の下で動かない

反ド・ジッター多様体の (共役を除いた)
変形空間は $12g - 12$ 次元

証明の構図

反ド・ジッター多様体の “普遍” 固有値 (2016)

↗ ↖

Symmetries in Geometry
theory for discontinuous gp
for pseudo-Riemannian mfds

(敷詰と変形)

Symmetries in Analysis
(infinite-dim’l vector space
controlled by Lie groups)

(表現論)

⋱ ⋰

ラプラシアンの固有関数の構成

周期なし → 周期解

定理 C の証明のスケッチ

Chern’s double fibration

Z

$q \swarrow \quad \searrow p$

Ξ
ホロ球面

$\mathbb{H}^3$
双曲空間

複素化

$S^3_{\mathbb{C}}$

⤹ 実形 ⤸

被覆

$\mathrm{AdS}^3 \longrightarrow M = \mathrm{AdS}^3/\Gamma$

反ド・ジッター空間

3 次元コンパクト反ド・ジッター多様体

Lemma (1) $h = \eta \circ p_! \circ q^*(g)$ is well-defined, eigenfunction of the hyperbolic Laplacian $\square$ of AdS^3.
(2) (周期解の構成) Ξ 上の超函数 g がある仮定 ★ をみたすならば h は Γ-軌道での和が収束し

$$h^\Gamma := \sum_{\gamma \in \Gamma} h(r\,\cdot) \neq 0$$

が成り立つ.

$\rightsquigarrow h^\Gamma$ は $M = \mathrm{AdS}^3/\Gamma$ 上のラプラシアン $\square$ の固有関数となる.

$\Gamma\backslash G/H$ 上のラプラシアンの L^2 固有関数の構成

$$\square f = \lambda f \quad \text{on} \quad \Gamma\backslash G/H$$

Step 1 周期のない 固有関数の構成

(積分幾何, Poisson 変換)

Step 2 解析接続 (別の “実形” へ)

(Flensted-Jensen’s 双対)

Step 3 周期解 の構成 (Poincaré 級数)

- 幾何的評価固有な作用の幾何的評価 $\Gamma \curvearrowright G/H$
  (Kazhdan–Margulis, K– , Benoist, Kassel–K, . . .)
- 解析的評価 G/H の固有関数の解析的評価
  (偏微分方程式系，超局所解析)
  (佐藤–柏原–河合, 大島, . . .)

References

- T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type, Math. Ann. 285 (1989), pp. 249–263.
- 小林俊行, 「不定値計量を持つ等質空間と不連続群」, 第 36 回幾何学シンポジウム, 東北大学, 1989, pp. 104–116.
- T. Kobayashi, Deformation of compact Clifford–Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds, Math. Ann. 310 (1998), pp. 395–409.
- T. Kobayashi, Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces, Mathematics Unlimited — 2001 and Beyond Springer-Verlag, 2001, pp. 723–747（邦訳有）
- T. Kobayashi, From “local” to “global”: Beyond the Riemannian geometry. Kavli IPMU News, 25, (2014), pp. 4–11.（邦訳有）
- T. Kobayashi, Intrinsic sound of anti-de Sitter manifolds, PROMS, 191 (2016), pp. 83–99.
- F. Kassel and T. Kobayashi, Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces. Adv. Math. 287, (2016), pp.123–236.
- T. Kobayashi, Global analysis by hidden symmetry, Progr. Math. vol. 323, pp. 359–397, 2017.