Conformal differential symmetry breaking operators for differential forms on spheres

小林俊行 (Toshiyuki KOBAYASHI)* , 久保利久 (Toshihisa KUBO)† ,
and
Michael PEVZNER‡

概 要

本稿ではまず前半に小林俊行氏 (東大数理・IPMU) および Michael Pevzner 氏 (ランス大学 (フランス)) との共著書 [Lecture Notes in Math. 2170, (2016)] で研究した球面上の微分形式間の微分対称性破れ作用素 $\mathcal{D}^{i\to j}\colon \mathcal{E}^i(S^n)\to\mathcal{E}^j(S^{n-1})$ の分類ならびにその具体的構成について報告する. その後, その際に中心的な役割を果たした F-method の一般論についての概説を行う.

1 序文

まず本稿の研究対象である「対称性破れ作用素」の定義から始める. X を滑らかな多様体, Y を X の滑らかな部分多様体とし, $G'\subset G$ をそれぞれ $Y\subset X$ に推移的に作用するリー群とする. そして $\mathcal{V}\to X$, $\mathcal{W}\to Y$ をそれぞれ V, W をファイバーに持つ G-, G'-同変な X, Y 上のベクトル束とし, $C^\infty(X,\mathcal{V})$, $C^\infty(Y,\mathcal{W})$ を $\mathcal{V}\to X$, $\mathcal{W}\to Y$ の滑らかな切断全体の空間とする. このとき, $C^\infty(X,\mathcal{V})$ から $C^\infty(Y,\mathcal{W})$ への線形作用素 $T\colon C^\infty(X,\mathcal{V})\to C^\infty(Y,\mathcal{W})$ で G' の作用と可換であるものを「対称性破れ作用素」(*symmetry breaking operator*) と呼び, 特に微分作用素であるものを「微分対称性破れ作用素」(*differential symmetry breaking operator*) と呼ぶ (cf. [6, 16, 18]). なお異なる多様体 X, Y のベクトル束の間の微分作用素については本稿の第 6節にある定義 8を参照されたい.

微分対称性破れ作用素の研究は共形幾何学や整数論の分野においてこれまでにも散発的に見られたが (cf. [1, 3, 4, 21]), 小林俊行氏による「代数的フーリエ変換」(*F-method*) が開発された 2010 年 3 月以降 ([15, p. 1799]), 同氏の提唱する「分岐則プログラム」([7, 8]) とも関連してその研究は急速に発展している. 特に本稿で述べる球面上の微分形式間における微分対称性破れ作用素 $\mathcal{D}^{i\to j}$ に関連する論文だけでも, 著書 [11] 以降すでにプレプリントが 3 本発表されている ([9, 12, 19]). 論文 [9] については注意 4を, そして論文 [12, 19] については注意 5をそれぞれ参照されたい.

さて著書 [11] では上記の (G,G',V,W) が

$$(G,G',V,W)=(O(n+1,1),O(n,1),{\textstyle\bigwedge}^i(\mathbb{C}^n),{\textstyle\bigwedge}^j(\mathbb{C}^{n-1}))\ (n\geq 3)$$

の場合に微分対称性破れ作用素 $\mathcal{D}^{i\to j}$ を完全に分類し, さらにその具体的な式まで決定した. 本稿では日本数学会 2017 年度秋季総合分科会特別講演アブストラクト [13] を元にその分類結果および明示的な式について報告する. またその際に中心的な役割を果たした F-method の一般論についての概説も行う.

*Kavli IPMU (WPI), 東京大学大学院数理科学研究科 (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo);
E-mail address: toshi@ms.u-tokyo.ac.jp;
†龍谷大学経済学部 (The Faculty of Economics, Ryukoku University);
E-mail address: toskubo@econ.ryukoku.ac.jp;
‡Laboratoire de Mathématiques de Reims, Université de Reims-Champagne-Ardenne, Reims, France;
E-mail address: pevzner@univ-reims.fr.

2 主問題

まず本研究の主問題を共形幾何の言葉で定式化する．(X, g) をリーマン多様体とし, $G = \mathrm{Conf}(X)$ を X の共形変換群とする．すなわち, G の元 φ は X の微分同相写像であり, φ による metric tensor g の引き戻しが正の定数倍になるときを言う．したがって, ある正値関数 $\Omega \in C^\infty(G \times X)$ (*conformal factor*) が存在し, 次式が成り立つ.

$$\varphi^* g_{\varphi(x)} = \Omega(\varphi, x)^2 g_x \quad (\varphi \in G, x \in X).$$

さて群 G は引き戻しによって, i 次微分形式全体の空間 $\mathcal{E}^i(X)$ $(0 \leq i \leq \dim X)$ に作用する．この作用は conformal factor Ω の複素冪乗を用いて連続変形できる．さらに G が X の向き付けをどのように変えるかの情報も取り込んで, $u \in \mathbb{C}$, $\delta \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ をパラメータとする表現

$$\varpi^{(i)}_{u,\delta}(\varphi)\alpha := or(\varphi)^\delta \Omega(\varphi^{-1}, \cdot)^u \varphi^* \alpha, \quad (\varphi \in G)$$

が定義できる．本稿では共形群 G のこの表現 $(\varpi^{(i)}_{u,\delta}, \mathcal{E}^i(X))$ を「共形表現」と呼ぶこととし, また単に $\mathcal{E}^i(X)_{u,\delta}$ とも表すこととする.

次に群 G の部分群として, X の部分多様体 Y を保つ群

$$G' := \mathrm{Conf}(X; Y) = \{\varphi \in G : \varphi(Y) = Y\}$$

を考える．このとき, G' は Y に共形変換として作用するので, 上記と同様に Y 上の j 次微分形式全体の空間 $\mathcal{E}^j(Y)$ $(0 \leq j \leq \dim Y)$ に群 G' の表現の族 $\varpi^{(j)}_{v,\varepsilon}$ $(v \in \mathbb{C}, \varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を定めることができる．この表現の族 $(\varpi^{(j)}_{v,\varepsilon}, \mathcal{E}^j(Y))$ を $\mathcal{E}^j(Y)_{v,\varepsilon}$ とも表すこととする.

これら二つの G' の表現 $\varpi^{(i)}_{u,\delta}|_{G'}$, $\varpi^{(j)}_{v,\varepsilon}$ と可換である微分作用素 $\mathcal{D}^{i \to j} \colon \mathcal{E}^i(X) \to \mathcal{E}^j(Y)$ が本研究で考えたい微分対称性破れ作用素である．(ここで, $\varpi^{(i)}_{u,\delta}|_{G'}$ は G の表現 $\varpi^{(i)}_{u,\delta}$ の G' への制限を意味する.) 本稿ではこの微分対称性破れ作用素 $\mathcal{D}^{i \to j}$ の空間を $\mathrm{Diff}_{G'}(\mathcal{E}^i(X)_{u,\delta}, \mathcal{E}^j(Y)_{v,\varepsilon})$ と表す.

それではここに主問題である問題 A, Bを提起する.

問題 A. 非自明な微分対称性破れ作用素が存在するパラメータ $(i, j, u, v, \delta, \varepsilon)$ の必要十分条件を求めよ．さらに $\mathrm{Diff}_{G'}\left(\mathcal{E}^i(X)_{u,\delta}, \mathcal{E}^j(Y)_{v,\varepsilon}\right)$ の次元を決定せよ.

問題 B. $\mathrm{Diff}_{G'}\left(\mathcal{E}^i(X)_{u,\delta}, \mathcal{E}^j(Y)_{v,\varepsilon}\right)$ の元を具体的に構成せよ.

例えば, $X = Y$, $G = G'$ の場合では, $i = j = 0$ のケースについては山辺作用素 ([14]), Paneitz 作用素 ([20]), GJMS 作用素 ([2]) などが知られている．また $j = i + 1$, $j = i - 1$ の場合の微分対称性破れ作用素の例としては順に外微分 $d \equiv d_X$, 余微分 $d^* \equiv d^*_X$ が上げられる.

より一般的に $X \neq Y$ の場合では, $j = i$, $j = i - 1$ の場合の簡単な例として, それぞれ X から Y への制限作用素 Rest_Y や制限作用素と内部積の合成作用素 $\mathrm{Rest}_Y \circ \iota_{N_Y(X)}$ が上げられる．ただし, ここで $\iota_{N(Y)}$ は (Y が余次元 1 の時の) 法ベクトル場に関する内部積を表す．さらに $(X, Y) = (S^n, S^{n-1})$, $i = j = 0$ の場合では, Juhl 作用素 ([4, 17]) が知られている.

さて共形不変な微分作用素 $\mathcal{D}^{i \to j} \colon \mathcal{E}^i(X) \to \mathcal{E}^j(Y)$, すなわち, G' の二つの作用 $\varpi^{(i)}_{u,\delta}|_{G'}$, $\varpi^{(j)}_{v,\varepsilon}$ と可換である微分作用素 $\mathcal{D}^{i \to j}$ が普遍的に構成できるとするならば, 共形変換群が特に大きいモデル空間 $(X, Y) = (S^n, S^{n-1})$ に対してもそのような作用素が存在するはずである．そこで文献 [11] では, このモデル空間に対して問題 A, Bに取り組み, 両方ともに解決することに成功した．これよりその分類結果および明示的式について解説する.

3　微分対称性破れ作用素の分類

まず分類結果から述べる．なお $G' = \mathrm{Conf}(X;Y)$ と $O(n,1)$ の関係等については第 5 節を参照されたい．

定理 1 ([11, Thm. 1.1])**.** $n \geq 3$ とし，$0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n-1$, $u, v \in \mathbb{C}$, $\delta, \varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする．このとき，$(i,j,u,v,\delta,\varepsilon)$ における次の 3 つの条件は同値である．

(i) $\mathrm{Diff}_{O(n,1)}(\mathcal{E}^i(S^n)_{u,\delta}, \mathcal{E}^j(S^{n-1})_{v,\varepsilon}) \neq \{0\}$.

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Diff}_{O(n,1)}(\mathcal{E}^i(S^n)_{u,\delta}, \mathcal{E}^j(S^{n-1})_{v,\varepsilon}) = 1$.

(iii) $j \in \{i-2, i-1, i, i+1\} \cup \{n-i+1, n-i, n-i-1, n-i-2\}$,
(u,v,δ,ε) : 正整数条件やパリティを含む明示条件.

(iii) のパラメータにおける条件については実際は次の 12 のケースに分類される．

Case (I). $j = i-2$, $2 \leq i \leq n-1$, $(u,v) = (n-2i, n-2i+3)$, $\delta \equiv \varepsilon \equiv 1 \bmod 2$.

Case (I′). $(i,j) = (n, n-2)$, $u \in -n-\mathbb{N}$, $v = 3-n$, $\delta \equiv \varepsilon \equiv u+n+1 \bmod 2$.

Case (II). $j = i-1$, $1 \leq i \leq n$, $v-u \in \mathbb{N}_+$, $\delta \equiv \varepsilon \equiv v-u \bmod 2$.

Case (III). $j = i$, $0 \leq i \leq n-1$, $v-u \in \mathbb{N}$, $\delta \equiv \varepsilon \equiv v-u \bmod 2$.

Case (IV). $j = i+1$, $1 \leq i \leq n-2$, $(u,v) = (0,0)$, $\delta \equiv \varepsilon \equiv 0 \bmod 2$.

Case (IV′). $(i,j) = (0,1)$, $u \in -\mathbb{N}$, $v = 0$, $\delta \equiv \varepsilon \equiv u \bmod 2$.

Case (∗I). $j = n-i+1$, $2 \leq i \leq n-1$, $u = n-2i$, $v = 0$, $\delta \equiv 1$, $\varepsilon \equiv 0 \bmod 2$.

Case (∗I′). $(i,j) = (n,1)$, $u \in -n-\mathbb{N}$, $v = 0$, $\delta \equiv \varepsilon+1 \equiv u+n+1 \bmod 2$.

Case (∗II). $j = n-i$, $1 \leq i \leq n$, $v-u+n-2i \in \mathbb{N}$, $\delta \equiv \varepsilon+1 \equiv v-u+n+1 \bmod 2$.

Case (∗III). $j = n-i-1$, $0 \leq i \leq n-1$, $v-u+n-2i-1 \in \mathbb{N}$, $\delta \equiv \varepsilon+1 \equiv v-u+n+1 \bmod 2$.

Case (∗IV). $j = n-i-2$, $1 \leq i \leq n-2$, $(u,v) = (0, 2i-n+3)$, $\delta \equiv 0$, $\varepsilon \equiv 1 \bmod 2$.

Case (∗IV′). $(i,j) = (0, n-2)$, $u \in -\mathbb{N}$, $v = 3-n$, $\delta \equiv \varepsilon+1 \equiv u \bmod 2$.

ただし, 次に述べる双対性により本質的には $j = i-1$ および $j = i+1$ の場合のみを考えれば良い. (前者は分類に連続パラメータが含まれ, 後者は離散パラメータのみで分類される.) まず

$$\tilde{i} := n-i,\ \tilde{j} := n-j-1,\ \tilde{u} := u+2i-n,\ \tilde{v} := v+2j-n+1,\ \tilde{\delta} \equiv \delta+1 \bmod 2,\ \tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon+1 \bmod 2$$

とおくと, ホッジ双対により, 写像 $(i,j,u,v,\delta,\varepsilon) \mapsto (\tilde{i},\tilde{j},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\delta},\tilde{\varepsilon})$ は

$$(\mathrm{I}) \iff (\mathrm{IV}), \quad (\mathrm{I}') \iff (\mathrm{IV}'), \quad (\mathrm{II}) \iff (\mathrm{III}) \tag{3.1}$$

の双対性を与え, また写像 $(i,j,u,v,\delta,\varepsilon) \mapsto (i,\tilde{j},u,\tilde{v},\delta,\tilde{\varepsilon})$ は

$$(\mathrm{P}) \iff (*\mathrm{P}) \qquad (\mathrm{P} = \mathrm{I}, \mathrm{I}', \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{IV}') \tag{3.2}$$

の双対性を与える．特に (∗I)–(∗IV′) のケースの対称性破れ作用素はホッジの星型作用素 $*$ と (I)–(IV′) の対称性破れ作用素の合成で与えられる．

4　微分対称性破れ作用素の明示的式

問題 Bの解を立体射影を通じて平坦な座標 $(X, Y) \approx (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-1})$ で記述する．なお (3.2) より，$j = i-2, i-1, i, i+1$ の場合について考えればよい．

4.1　$j = i-1, i$ の場合

それでは $j = i-1, i$ の場合から始める．まず $\widetilde{C}^\mu_a(t)$ を (全ての $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $\widetilde{C}^\mu_a(t) \not\equiv 0$ となるよう正規化した) a 次の Gegenbauer 多項式とし，

$$(I_a \widetilde{C}^\mu_a)(y, z) := y^{\frac{a}{2}} \widetilde{C}^\mu_a \left(\frac{z}{\sqrt{y}} \right)$$

とおいて 2 変数 y, z に関する a 次の斉次式を定める．さらに形式的に y に $-\Delta_{\mathbb{R}^{n-1}}$ を，z に $\frac{\partial}{\partial x_n}$ を代入して得られるスカラー値微分作用素を $\mathcal{D}^\mu_a$ と書く．すなわち，

$$\mathcal{D}^\mu_a := (I_a \widetilde{C}^\mu_a) \left(-\Delta_{\mathbb{R}^{n-1}}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

このとき，パラメータ $u \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{N}$ に対し，二つの線型作用素の族 $\mathcal{D}^{i \to i-1}_{u,a} \colon \mathcal{E}^i(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}^{i-1}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\mathcal{D}^{i \to i}_{u,a} \colon \mathcal{E}^i(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}^i(\mathbb{R}^{n-1})$ を次に定義する．

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{i \to i-1}_{u,a} &:= \operatorname{Rest}_{x_n=0} \circ \left(-\mathcal{D}^{\mu+1}_{a-2} d_{\mathbb{R}^n} d^*_{\mathbb{R}^n} \iota_{\frac{\partial}{\partial x_n}} - \gamma(\mu, a) \mathcal{D}^{\mu+1}_{a-1} d^*_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{2}(u + 2i - n) \mathcal{D}^\mu_a \iota_{\frac{\partial}{\partial x_n}} \right), \\
\mathcal{D}^{i \to i}_{u,a} &:= \operatorname{Rest}_{x_n=0} \circ \left(\mathcal{D}^{\mu+1}_{a-2} d_{\mathbb{R}^n} d^*_{\mathbb{R}^n} - \gamma(\mu - \frac{1}{2}, a) \mathcal{D}^\mu_{a-1} d_{\mathbb{R}^n} \iota_{\frac{\partial}{\partial x_n}} + \frac{1}{2}(u + a) \mathcal{D}^\mu_a \right).
\end{aligned}$$

ただし，$\mu := u + i - \frac{1}{2}(n-1)$, $\gamma(\mu, a) := 1$ (a: 奇数), $\mu + \frac{a}{2}$ (a: 偶数) とする．

ホッジ双対より双対性 (II) $\iff$ (III) が成り立つと上述したが (式 (3.1))，実際に $\mathcal{D}^{i \to i}_{u,a}$ は

$$\mathcal{D}^{i \to i}_{u,a} = (-1)^{n-1} *_{\mathbb{R}^{n-1}} \circ \mathcal{D}^{n-i \to n-i-1}_{u-n+2i, a} \circ (*_{\mathbb{R}^n})^{-1}$$

で与えられる．ただし，ここで $*_X$ はホッジの星型作用素 $*_X \colon \mathcal{E}^i(X) \to \mathcal{E}^{n-i}(X)$ を表す．

これら二つの微分作用素 $\mathcal{D}^{i \to i-1}_{u,a}$, $\mathcal{D}^{i \to i}_{u,a}$ は generic なパラメータに対しては消えないが，以下の命題 2 で述べる特別なパラメータの場合には消えてしまうことに注意する．

命題 2 ([11, Prop. 1.4])**.** $u \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{N}$ とする．

(1) $1 \le i \le n$ に対して，$\mathcal{D}^{i \to i-1}_{u,a} = 0$ となる必要十分条件は $(u, a) = (n - 2i, 0)$, $(u, i) = (-n - a, n)$ である．

(2) $0 \le i \le n-1$ に対して，$\mathcal{D}^{i \to i}_{u,a} = 0$ となる必要十分条件は $(u, a) = (0, 0)$, $(u, i) = (-a, 0)$ である．

そこで，どのような (i, a, u) に対しても消えないよう $\mathcal{D}^{i \to i-1}_{u,a}$, $\mathcal{D}^{i \to i}_{u,a}$ をそれぞれ次のように正規化する．

$$\widetilde{\mathcal{D}}^{i \to i-1}_{u,a} := \begin{cases} \operatorname{Rest}_{x_n=0} \circ \iota_{\frac{\partial}{\partial x_n}}, & a = 0; \\ \operatorname{Rest}_{x_n=0} \circ \mathcal{D}^{u + \frac{n+1}{2}}_a \circ \iota_{\frac{\partial}{\partial x_n}}, & i = n; \\ \mathcal{D}^{i \to i-1}_{u,a}, & \text{それ以外}, \end{cases} \qquad \widetilde{\mathcal{D}}^{i \to i}_{u,a} := \begin{cases} \operatorname{Rest}_{x_n=0}, & a = 0; \\ \operatorname{Rest}_{x_n=0} \circ \mathcal{D}^{u - \frac{n-1}{2}}_a, & i = 0; \\ \mathcal{D}^{i \to i}_{u,a}, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

このとき以下の主張が成り立つ．

定理 3 ([11, Thms. 1.5, 1.6])**.** $1 \le i \le n$ とし，$j = i-1, 1$ とする．また $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ および $(\delta, \varepsilon) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ は条件 $v - u \in \mathbb{N}_+$, $\delta \equiv \varepsilon \equiv v - u \bmod 2$ を満たすとする．

(1) 微分作用素 $\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to j}_{u,v-u-i+j}$ は, $\mathbb{R}^n$ の共形的コンパクト化である S^n 上の作用素へ拡張され, また非自明な $O(n,1)$-準同型 $\mathcal{E}^i(S^n)_{u,\delta} \to \mathcal{E}^j(S^{n-1})_{v,\varepsilon}$ を誘導する.

(2) $\mathcal{E}^i(S^n)_{u,\delta}$ から $\mathcal{E}^j(S^{n-1})_{v,\varepsilon}$ への任意の $O(n,1)$-同変な微分作用素は (1) における微分作用素 $\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to j}_{u,v-u-i+j}$ の定数倍として与えられる.

注意 4. $j=i,i-1$ に対して微分対称性破れ作用素 $\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to j}_{u,v-u-i+j}$ は non-local な対称性破れ作用素 (積分作用素) の residue としても得られることが最近小林俊行氏によって示された ([9]). また $(n,i,j)=(2,1,0)$ の場合には関連した研究として Rankin–Cohen brackets を用いた研究がある ([10]).

4.2　$j=i+1,i-2$ の場合

次に $j=i+1,i-2$ の場合を考える. この場合は $j=i-1,i$ の場合とは対照的に高階の微分作用素はほとんど出てこない. まず $j=i+1$ に対して, 微分作用素の族 $\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to i+1}_{u,a}\colon \mathcal{E}^i(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{E}^{i+1}(\mathbb{R}^{n-1})$ を以下に定義する.

$$\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to i+1}_{u,a} := \mathrm{Rest}_{x_n=0}\circ \mathcal{D}^{u-\frac{n-1}{2}}_{-u}\circ d_{\mathbb{R}^n}.$$

ただし, $a=1-u$ とし, さらにケース (IV) の場合には $u=0$ $(1\le i\le n-2)$, ケース (IV$'$) の場合には $u\in-\mathbb{N}$ $(i=0)$ の条件を加える. なお, $\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to i+1}_{0,1}$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{0\to 1}_{1-a,a}$ はそれぞれ $\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to i+1}_{0,1}=\mathrm{Rest}_{x_n=0}\circ d_{\mathbb{R}^n}$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{0\to 1}_{1-a,a}=d_{\mathbb{R}^{n-1}}\circ\widetilde{\mathcal{D}}^{0\to 0}_{1-a,a-1}$ で与えられる.

最後に $j=i-2$ に対して, 微分作用素の族 $\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to i-2}_{u,a}\colon \mathcal{E}^i(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{E}^{i-2}(\mathbb{R}^{n-1})$ を

$$\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to i-2}_{u,a} := \mathrm{Rest}_{x_n=0}\circ \mathcal{D}^{u+\frac{n+1}{2}}_{-u+n-2i}\circ \iota_{\frac{\partial}{\partial x_n}}\circ d^*_{\mathbb{R}^n}$$

と定義する. ただし, $j=i+1$ の場合のように $a=1+n-2i-u$ とし, さらにケース (I) の場合には $u=n-2i$ $(2\le i\le n-1)$, ケース (I$'$) の場合には $u\in\{-n,-n-1,-n-2,\ldots\}$ $(i=n)$ の条件を加える. なお, $\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to i-2}_{n-2i,1}$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{n\to n-2}_{1-n-a,a}$ はそれぞれ $\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to i-2}_{n-2i,1}=\mathrm{Rest}_{x_n=0}\circ\iota_{\frac{\partial}{\partial x_n}}\circ d^*_{\mathbb{R}^n}$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{n\to n-2}_{1-n-a,a}=-d^*_{\mathbb{R}^{n-1}}\circ\widetilde{\mathcal{D}}^{n\to n-1}_{1-n-a,a-1}$ で与えられる. また $j=i,i-1$ の場合と同様,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to i-2}_{n-2i,1} &= (-1)^{n-1}*_{\mathbb{R}^{n-1}}\circ\widetilde{\mathcal{D}}^{n-i\to n-i+1}_{0,1}\circ(*_{\mathbb{R}^n})^{-1}, && ((\mathrm{I})\iff(\mathrm{IV}))\\
\widetilde{\mathcal{D}}^{n\to n-2}_{u-n,1-u} &= (-1)^{n-1}*_{\mathbb{R}^{n-1}}\circ\widetilde{\mathcal{D}}^{0\to 1}_{u,1-u}\circ(*_{\mathbb{R}^n})^{-1}, && ((\mathrm{I}')\iff(\mathrm{IV}'))
\end{aligned}$$

が成り立つ.

$j=i-2,i+1$ の場合も, ケース (I), (I$'$), (IV), (IV$'$) のそれぞれのパラメータに対して, 定理 3と同様の主張が成り立つ ([11, Thms. 1.7, 1.8]).

注意 5. 文献 [12] では局所的に定義された微分対称性破れ作用素がコンパクト化に拡張される定理である「extension theorem」([16, Thm. 5.3]) を用いて, 本研究結果をさらに擬リーマン球面へ拡張している. また文献 [19] では本研究結果や文献 [18] で使われた手法を用いて, 対称性破れ作用素の空間の次元を求めている.

5　共形表現 $\varpi^{(i)}_{u,\delta}$ と主系列表現 $I(i,\lambda)_\alpha$

文献 [11] では $(X,Y)=(S^n,S^{n-1})$ に対し, 問題 A, B (共形幾何) を解決するにあたって, それらを一旦, 主系列表現 (表現論) の問題として捉え, 代数的フーリエ変換 (F-method) を使用することにより証明した. このことについて詳しく述べるため, 本節では共形表現 $(\varpi^{(i)}_{u,\delta},\mathcal{E}^i(X))$ とそれに対応する主系列表現 $I(i,\lambda)_\alpha$ の関係について簡単に述べる.

まず初めに $G=O(n+1,1)$ とし, $P=MAN_+$ を G の極小放物型部分群 P のラングランズ分解とする. それから $0\leq i\leq n$, $\alpha\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して, $\bigwedge^i(\mathbb{C}^n)\otimes(-1)^\alpha\otimes\mathbb{C}_\lambda$ を $MA\simeq(O(n)\times O(1))\times\mathbb{R}$ の外部テンソル積表現とし, さらに N_+ をそこへ自明に作用させることにより, これを P の表現とみなす. 次にこの外部テンソル積表現に同伴した実旗多様体 $X=G/P\simeq S^n$ 上の G-同変ベクトル束 $\mathcal{V}^i_{\lambda,\alpha}:=G\times_P\left(\bigwedge^i(\mathbb{C}^n)\otimes(-1)^\alpha\otimes\mathbb{C}_\lambda\right)$ を定め, その滑らかな切断全体の空間 $C^\infty(X,\mathcal{V}^i_{\lambda,\alpha})$ に G の主系列表現

$$I(i,\lambda)_\alpha:=\mathrm{Ind}_P^G\left(\bigwedge^i(\mathbb{C}^n)\otimes(-1)^\alpha\otimes\mathbb{C}_\lambda\right)$$

を定義する. 同様に $0\leq j\leq n-1$, $\beta\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\nu\in\mathbb{C}$ に対して, G の部分群 $G'=O(n,1)$ の主系列表現

$$J(j,\nu)_\beta:=\mathrm{Ind}_{P'}^{G'}\left(\bigwedge^j(\mathbb{C}^{n-1})\otimes(-1)^\beta\otimes\mathbb{C}_\nu\right)$$

を $Y:=G'/P'\simeq S^{n-1}$ 上の G'-同変ベクトル束 $\mathcal{W}^j_{\nu,\beta}:=G'\times_{P'}\left(\bigwedge^j(\mathbb{C}^{n-1})\otimes(-1)^\beta\otimes\mathbb{C}_\nu\right)$ の滑らかな切断全体の空間 $C^\infty(Y,\mathcal{W}^j_{\nu,\beta})$ に定義する. なお $k\in\mathbb{Z}$ に対し, $I(i,\lambda)_{k \bmod 2}$, $J(j,\nu)_{k \bmod 2}$ を単に $I(i,\lambda)_k$, $J(j,\nu)_k$ と書くこととする.

さて球面 $X=S^n$ の共形群 $\mathrm{Conf}(X)$ ならびに大円 $Y=S^{n-1}$ を保つ元からなる部分群 $\mathrm{Conf}(X;Y)$ に対して, それぞれ次の同型が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathrm{Conf}(X)\quad&\simeq O(n+1,1)/\{\pm I_{n+2}\}, &(5.1)\\ \mathrm{Conf}(X;Y)&\simeq(O(n,1)\times O(1))/\{\pm I_{n+2}\}. &(5.2)\end{aligned}$$

これらの同型を踏まえ, これより共形表現 $\varpi^{(i)}_{u,\delta}$ と主系列表現 $I(i,\lambda)_\delta$ の関係を考える.

まず同型 (5.1) を通して二つの表現 $\varpi^{(i)}_{u,\delta}$, $I(i,\lambda)_\delta$ に対して, 以下の同型が成り立つ.

命題 6 ([11, Prop. 2.3])**.** $G=O(n+1,1)$ $(n\geq 2)$ とし, $0\leq i\leq n$, $u\in\mathbb{C}$ とする. このとき, $\delta\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に対して, 次の G 加群としての同型が成り立つ.

$$\varpi^{(i)}_{u,\delta}\simeq\begin{cases}I(i,u+i)_i, & \delta=0;\\ I(n-i,u+i)_{n-i}, & \delta=1.\end{cases}$$

命題 6より, 共形表現 $(\varpi^{(i)}_{u,\delta},\mathcal{E}^i(X)_{u,\delta})$ を調べるのに条件 $\alpha\equiv\ell \bmod 2$ を満たす主系列表現 $I(\ell,\lambda)_\alpha$ を調べれば十分であることが分かる. さらに同型 (5.2) より, 次の同型が成り立つ.

補題 7 ([11, Lem. 11.2])**.** $(X,Y)=(S^n,S^{n-1})$ に対して, 次の自然な同型が成り立つ.

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Conf}(X;Y)}(\mathcal{E}^i(X)_{u,\delta},\mathcal{E}^j(X)_{v,\varepsilon})\simeq\mathrm{Hom}_{O(n,1)}(I(\delta\cdot i,u+i)_{\delta\cdot i},J(\varepsilon\cdot j,v+j)_{\varepsilon\cdot j}). \tag{5.3}$$

ただし, $\delta,\varepsilon\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $0\leq i\leq n$, $0\leq j\leq n-1$ に対して, $\delta\cdot i$, $\varepsilon\cdot j$ を次に定義する.

$$\delta\cdot i:=\begin{cases}i, & \delta\equiv 0 \bmod 2;\\ n-i, & \delta\equiv 1 \bmod 2,\end{cases}\qquad \varepsilon\cdot j:=\begin{cases}j, & \varepsilon\equiv 0 \bmod 2;\\ n-1-j, & \varepsilon\equiv 1 \bmod 2.\end{cases}$$

さて同型 (5.3) より, 特に微分作用素全体からなる部分空間に対して, 次の同型が成り立つ.

$$\mathrm{Diff}_{\mathrm{Conf}(X;Y)}(\mathcal{E}^i(X)_{u,\delta},\mathcal{E}^j(X)_{v,\varepsilon})\simeq\mathrm{Diff}_{O(n,1)}(I(\delta\cdot i,u+i)_{\delta\cdot i},J(\varepsilon\cdot j,v+j)_{\varepsilon\cdot j}). \tag{5.4}$$

文献 [11] では F-method を用いてまず $\mathrm{Diff}_{O(n,1)}(I(i,\lambda)_\alpha,J(j,\nu)_\beta)$ の元を分類・構成し, それから同型 (5.4) を通し, $\mathrm{Diff}_{\mathrm{Conf}(X;Y)}(\mathcal{E}^i(X)_{u,\delta},\mathcal{E}^j(X)_{v,\varepsilon})$ の問題である問題 A, B を解決した. 次節ではこの F-method について解説する.

6 F-method

主問題 A, B を解決する上で中心的な役割を果たした F-method の一般論を概説し, 本稿を終えることとする. 詳細は文献 [16] を参照されたい.

ここまで $X = S^n$, $Y = S^{n-1}$ と異なる多様体のベクトル束の間の微分作用素について述べてきたが, その定義については全く触れてこなかった. そこでまず異なる多様体 X, Y のベクトル束 $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ の間の微分作用素の定義から始める.

定義 8. ([16, Def. 2.1]) 与えられた底空間の間の滑らかな写像 (単射でなくても良い) $p\colon Y \to X$ に対して, 次の包含関係を満たす連続線形写像 $T\colon C^\infty(X, \mathcal{V}) \to C^\infty(Y, \mathcal{W})$ を微分作用素と呼ぶ.

$$p(\mathrm{Supp}(Tf)) \subset \mathrm{Supp}(f) \quad \text{for any } f \in C^\infty(X, \mathcal{V}).$$

実際, $X = Y$ で p が恒等写像の場合, 定義 8で定められた微分作用素は普通の意味での微分作用素と一致する. 詳しくは [16, Rem. 2.2, Ex. 2.4] を参照されたい.

さて詳しい設定や記号等は後に紹介するとして, 手始めに F-method の大まかなアイデアに触れておく. F-method ではまず以下の 3 つの線形空間の間の同型 (6.1) を軸とする.

$$\mathrm{Sol(PDE)} \overset{\sim}{\longleftarrow} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}', P'}(\text{Verma modules}) \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathrm{Diff}_{G'}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y). \tag{6.1}$$

ここで $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}', P'}$(Verma modules) は $\mathfrak{g}'$ の一般 Verma 加群から $\mathfrak{g}$ のそれへの $(\mathfrak{g}', P')$ 加群としての準同型全体の空間を表し, Sol(PDE) はある偏微分方程式系 (*F-system*) の解空間を表す. (詳しくはそれぞれ項 6.5, 6.6を参照されたい. また同型 (6.1) のより正確な図式については図式 (6.7) を参照されたい.) F-method では同型 (6.1) を通し, 偏微分方程式系を解くことによって微分対称性破れ作用素 $\mathcal{D} \in \mathrm{Diff}_{G'}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y)$ を分類・構成する. 特に $\mathfrak{g}$ の一般 Verma 加群を誘導する放物型部分代数 $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}_+$ の冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ が可換の場合は, 定数係数の微分作用素の表象を与える写像 Symb によって, 同型「Sol $\overset{\sim}{\to}$ Diff」が直接得られる (下記の定理 13を参照).

ところで同型 (6.1) において, 同型「Hom $\overset{\sim}{\to}$ Diff」(*duality theorem*) は $G' = G$ で特に多様体 X が旗多様体の時に知られていたが ([16, Rem. 2.11] 参照), 同型「Sol $\overset{\sim}{\leftarrow}$ Hom」は $G' = G$ の場合も含めて, 小林俊行氏による「代数的フーリエ変換」の開発によって初めて明らかになった ([5, 6, 15, 16]). この代数的フーリエ変換の開発により, それまでには知られていなかった新しい微分対称性破れ作用素が次々と構成されている (cf. [11, 17]). 代数的フーリエ変換については項 6.2, 6.3, 6.4 を参照されたい.

それではこれより文献 [11, Sect. 3.3] を元に, 順を追って F-method について概説する.

6.1 主系列表現 $\pi_{(\sigma,\lambda)}$ と微分表現 $d\pi_{(\sigma,\lambda)}$

まず G を実簡約リー群とし, $P = MAN_+$ を放物型部分群 P のラングランズ分解とする. またこれらのリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{p}(\mathbb{R}) = \mathfrak{m}(\mathbb{R}) + \mathfrak{a}(\mathbb{R}) + \mathfrak{n}_+(\mathbb{R})$ と書き, さらにそれらを複素化したリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}_+$ と書くこととする.

$\lambda \in \mathfrak{a}^* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ に対し, A の 1 次元表現 $a \mapsto a^\lambda := e^{\langle \lambda, \log a \rangle}$ を $\mathbb{C}_\lambda$ と表す. MN_+ を自明に作用させることにより, $\mathbb{C}_\lambda$ を P の表現ともみなす. 続いて M の有限次元表現 (σ, V) と $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対し, V 上の MA の表現 $\sigma_\lambda \equiv \sigma \otimes \mathbb{C}_\lambda$ を $ma \mapsto a^\lambda \sigma(m)$ と定める. $\mathbb{C}_\lambda$ の場合と同様, N_+ を自明に作用させることにより, (σ_λ, V) を P の表現ともみなす. これにより, 表現 (σ_λ, V) に同伴した実旗多様体 $X = G/P$ 上の G-同変ベクトル束 $\mathcal{V}_X = G \times_P V$ を定め, 主系列表現 $\pi_{(\sigma,\lambda)} = \mathrm{Ind}_P^G(\sigma_\lambda)$ をその滑らかな切断全体の空間 $C^\infty(X, \mathcal{V}_X)$ に定義する.

分解 $\mathfrak{g}(\mathbb{R}) = \mathfrak{n}_-(\mathbb{R}) + \mathfrak{m}(\mathbb{R}) + \mathfrak{a}(\mathbb{R}) + \mathfrak{n}_+(\mathbb{R})$ を $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ の Gelfand–Naimark 分解とする. このとき, ベクトル束 $\mathcal{V}_X \to X$ は開ブリュア胞体 $\mathfrak{n}_-(\mathbb{R}) \simeq N_- \hookrightarrow G/P = X$ へ制限すると自明化する. そこでこの開ブリュア胞体

への制限を通し, $C^\infty(X,\mathcal{V}_X)$ を $C^\infty(\mathfrak{n}_-(\mathbb{R}))\otimes V$ の部分空間とみなす．リー環 $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ の $C^\infty(\mathfrak{n}_-(\mathbb{R}))\otimes V$ 上の微分表現を $d\pi_{(\sigma,\lambda)}$ と書くこととする．

6.2 準同型 $\widehat{d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}}$

次に $2\rho\in\mathfrak{a}^*$ を $Z\mapsto \mathrm{Trace}(\mathrm{ad}(Z)\colon\mathfrak{n}_+(\mathbb{R})\to\mathfrak{n}_+(\mathbb{R}))$ より定まる $\mathfrak{a}(\mathbb{R})$ 上の準同型とし, P の 1 次元表現 $p\mapsto\chi_{2\rho}(p)=|\det(\mathrm{Ad}(p)\colon\mathfrak{n}_+(\mathbb{R})\to\mathfrak{n}_+(\mathbb{R}))|$ を $\mathbb{C}_{2\rho}$ と表す．また (σ,V) に対し, $V^\vee=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$ と書き, $(\sigma^\vee,V^\vee)$ を (σ,V) の反傾表現とする．そして $\lambda\in\mathfrak{a}^*$ に対して, MA の表現 $\sigma_\lambda^*:=\sigma^\vee\otimes\mathbb{C}_{2\rho-\lambda}$ を定め, σ_λ の場合と同様にこれを P の表現とみなす．σ_λ^* に同伴した双対ベクトル束 $\mathcal{V}_X^*=G\times_P V^\vee$ の滑らかな切断全体の空間 $C^\infty(X,\mathcal{V}_X^*)$ 上に表現 $\pi_{(\sigma,\lambda)^*}=\mathrm{Ind}_P^G(\sigma_\lambda^*)$ を定義する．このとき X 上の積分は G-不変な自然な非退化双線型形式

$$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma_\lambda)\times\mathrm{Ind}_P^G(\sigma_\lambda^*)\to\mathbb{C}$$

を与える．

さて $C^\infty(X,\mathcal{V}_X)$ と同様に $C^\infty(X,\mathcal{V}_X^*)$ は $C^\infty(\mathfrak{n}_-(\mathbb{R}))\otimes V^\vee$ の部分空間とみなせる．このとき $C^\infty(\mathfrak{n}_-(\mathbb{R}))\otimes V^\vee$ 上の $\pi_{(\sigma,\lambda)^*}$ の微分表現 $d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}$ はリー環としての準同型

$$d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathcal{D}(\mathfrak{n}_-)\otimes\mathrm{End}(V^\vee)$$

を与える．ただしここで $\mathcal{D}(\mathfrak{n}_-)$ は $\mathfrak{n}_-$ のワイル代数を表す．このとき以下に定める「ワイル代数の代数的フーリエ変換」を $d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}$ に施すことにより, リー環としての準同型

$$\widehat{d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}}\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathcal{D}(\mathfrak{n}_+)\otimes\mathrm{End}(V^\vee)$$

を得る．

6.3 ワイル代数の代数的フーリエ変換

E を複素有限次元ベクトル空間とし, $\dim_{\mathbb{C}}E=n$ とする．また E のワイル代数を $\mathcal{D}(E)$ で表す．すなわち E の座標を $(z_1,\ldots,z_n)$ とすると

$$\mathcal{D}(E):=\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n,\tfrac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\tfrac{\partial}{\partial z_n}].$$

ワイル代数 $\mathcal{D}(E)$ は非可換環であることに注意されたい．(例えば, $\frac{\partial}{\partial z_i}z_i-z_i\frac{\partial}{\partial z_i}=1$.) また $E^\vee$ を E の双対空間とし, 座標を $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ で表すこととする．このとき E のワイル代数 $\mathcal{D}(E)$ の元 $\frac{\partial}{\partial z_i}$, z_i $(i=1,\ldots,n)$ に対して, $E^\vee$ のワイル代数 $\mathcal{D}(E^\vee)$ の元 $\widehat{\frac{\partial}{\partial z_i}}$, $\widehat{z_i}$ を以下に定める．

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial z_i}}:=-\zeta_i,\quad \widehat{z_i}:=\frac{\partial}{\partial\zeta_i}. \tag{6.2}$$

定義 9 ([16, Def. 3.1])**.** 式 (6.2) より定まる代数としての同型

$$\mathcal{D}(E)\longrightarrow\mathcal{D}(E^\vee),\quad T\mapsto\widehat{T}$$

を「ワイル代数の代数的フーリエ変換」と呼ぶ．

ワイル代数の代数的フーリエ変換を定める式 (6.2) の定義は後述する図式 (6.9) に関係している．詳しくは注意 14を参照されたい．

6.4 一般 Verma 加群の代数的フーリエ変換 F_c

リー環 $\mathfrak{g}$ の一般 Verma 加群 $\mathrm{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee)$ を $\mathrm{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} V^\vee$ と定義する．ただし，ここで $V^\vee$ は $\mathfrak{n}_+$ を自明に作用させ $d\sigma^\vee \otimes (-\lambda)$ を通し $\mathfrak{p}$ 加群とみなしている．このとき $\mathfrak{g}$ 加群 $\mathrm{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee)$ は P 加群構造も合わせ持つ．そこで P が非連結である場合も考え，$\mathrm{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee)$ を $(\mathfrak{g}, P)$ 加群とみなす．一方で $\widehat{d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}}$ を通して $\mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes V^\vee$ もまた $(\mathfrak{g}, P)$ 加群とみなせる．このとき次の主張が成り立つ．

定理 10 ([16, Cor. 3.12])**.** $(\mathfrak{g}, P)$ 加群として同型

$$F_c\colon \mathrm{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes V^\vee \tag{6.3}$$

が成り立つ．また同型 (6.3) は $u \in U(\mathfrak{g})$, $v^\vee \in V^\vee$ に対して，

$$u \otimes v^\vee \longmapsto \widehat{d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}}(u)(1 \otimes v^\vee)$$

で与えられる．

この同型 F_c を「一般 Verma 加群の代数的フーリエ変換」と呼ぶ ([16, Sect. 3.4])．

6.5 Duality Theorem (Hom $\overset{\sim}{\to}$ Diff)

同型 (6.1) における同型「Hom $\overset{\sim}{\to}$ Diff」(duality theorem) は放物型部分群 P に対してだけでなく，一般の閉部分群 H に対して成り立つ．本項ではその一般の設定で duality theorem を記述する．

まず $H' \subset H$ を G の (連結とは限らない) 閉部分群とし，$\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ をそれぞれ H', H のリー環の複素化とする．また G の閉部分群 G' を $H' \subset G'$ となるようにとる．それから V, W を順に H, H' の有限次元表現とし，同伴ベクトル束 $\mathcal{V}_X := G \times_H V$, $\mathcal{W}_Y := G' \times_{H'} W$ を定める．このとき，Y から X へは

$$Y \hookrightarrow G/H' \twoheadrightarrow X$$

となる滑らかな写像が存在するため，同伴ベクトル束 $\mathcal{V}_X$, $\mathcal{W}_Y$ の間の微分作用素が定義できることに注意されたい (定義 8)．

また $\mathrm{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} V^\vee$, $\mathrm{ind}_{\mathfrak{h}'}^{\mathfrak{g}'}(W^\vee) := U(\mathfrak{g}') \otimes_{U(\mathfrak{h}')} W^\vee$ とし，前節と同様にこれらをそれぞれ $(\mathfrak{g}, H)$ 加群，$(\mathfrak{g}', H')$ 加群とみなす．特に前者は $(\mathfrak{g}', H')$ への制限を通して，$(\mathfrak{g}', H')$ 加群ともみなす．

このとき次の主張が成り立つ．

定理 11 (Duality Theorem, [16, Thm. 2.9])**.** ベクトル空間として次の自然な同型が成り立つ．

$$D_{X\to Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',H'}(\mathrm{ind}_{\mathfrak{h}'}^{\mathfrak{g}'}(W^\vee), \mathrm{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Diff}_{G'}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y). \tag{6.4}$$

同型 $D_{X\to Y}$ は単に抽象的に与えられる訳ではなく具体的に与えられる．詳しくは [16, Thm. 2.9] を参照されたい．

6.6 F-method (Sol $\overset{\sim}{\leftarrow}$ Hom)

G' を G の実簡約部分群とし，$P' = M'A'N'_+$ を G' の放物型部分群で $M'A' \subset MA$, $N'_+ \subset N_+$ を満たすものとする．G', P' 等のリー環は G の場合と同様に $\mathfrak{g}'(\mathbb{R})$, $\mathfrak{p}'(\mathbb{R})$ などと表す．また P の場合と同様に，M' の有限次元表現 (τ, W) と $\nu \in (\mathfrak{a}')^*$ より，P' の表現 τ_ν を定め，G'-同変ベクトル束 $\mathcal{W}_Y := G' \times_{P'} W \to Y := G'/P'$ を定義する．

さて $\psi \in (\mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes V^\vee) \otimes W \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W \otimes \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+))$ に対して, 次の偏微分方程式系 (*F-system*) を考える.

$$(\widehat{d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}}(C) \otimes \mathrm{id}_W)\psi = 0 \quad \text{for all } \ C \in \mathfrak{n}'_+. \tag{6.5}$$

ここで $\widehat{d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}}(C)$ はベクトル場でなく, 例えば $\mathfrak{n}_+$ が可換の場合では (6.5) は 2 階の微分方程式になることに注意されたい ([16, Lem. 3.8]). 次に空間 $\mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+;\sigma_\lambda,\tau_\nu)$ を F-system の解空間

$$\mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+;\sigma_\lambda,\tau_\nu) := \{\psi \in \mathrm{Hom}_{L'}(V, W \otimes \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+)) : \psi \text{ は F-system(6.5) を満たす}\} \tag{6.6}$$

と定める. このとき次の主張が成り立つ.

定理 12 (F-method, [16, Thm. 4.1])**.** ベクトル空間として次の自然な同型が成り立つ.

$$F_c \otimes \mathrm{id}\colon \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',P'}(\mathrm{ind}_{\mathfrak{p}'}^{\mathfrak{g}'}(W^\vee), \mathrm{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+;\sigma_\lambda,\tau_\nu).$$

定理 11, 12より, 以下のように同型「$\mathrm{Sol} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Diff}$」を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+;\sigma_\lambda,\tau_\nu) \arrow[dr, dotted, "\sim"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',P'}(\mathrm{ind}_{\mathfrak{p}'}^{\mathfrak{g}'}(W^\vee), \mathrm{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee)) \arrow[ur, "F_c\otimes\mathrm{id}", "\sim"'] \arrow[rr, "\sim", "D_{X\to Y}"'] & & \mathrm{Diff}_{G'}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y)
\end{tikzcd} \tag{6.7}$$

6.7 冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ が可換の場合

最後に放物型部分代数 $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}_+$ の冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ が可換の場合を考える. 定数係数の微分作用素の表象を与える写像

$$\mathrm{Symb}\colon \mathrm{Diff}^{\mathrm{const}}\left(C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes V, C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes W\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pol}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n] \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \tag{6.8}$$

を次に定める.

$$e^{-\langle z,\zeta\rangle} D\left(e^{\langle z,\zeta\rangle} \otimes v\right) = \mathrm{Symb}(D)(v) \in \mathrm{Pol}[\zeta_1, \cdots, \zeta_n] \otimes W \quad \text{for all } v \in V.$$

このとき次の主張が成り立つ.

定理 13 ([16, Cor. 4.3])**.** 冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ が可換であるとき, ベクトル空間として次の同型が成り立つ.

$$\mathrm{Rest}_Y \circ \mathrm{Symb}^{-1}\colon \mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+;\sigma_\lambda,\tau_\nu) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Diff}_{G'}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y).$$

さらに以下の 3 つの同型による図式は可換になる.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+;\sigma_\lambda,\tau_\nu) \arrow[dr, "\mathrm{Rest}_Y \circ \mathrm{Symb}^{-1}", "\sim"'] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',P'}(\mathrm{ind}_{\mathfrak{p}'}^{\mathfrak{g}'}(W^\vee), \mathrm{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee)) \arrow[ur, "F_c\otimes\mathrm{id}", "\sim"'] \arrow[rr, "\sim", "D_{X\to Y}"'] & {} & \mathrm{Diff}_{G'}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y)
\end{tikzcd} \tag{6.9}$$

注意 14. ワイル代数の代数的フーリエ変換 (定義 9) を定めた式 (6.2) は定理 13にある図式が可換になるように定められていることに注意されたい.

冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ が一般の場合では Verma module 間の準同型の空間を経由することで同型「$\mathrm{Sol} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Diff}$」が得られていたが (図式 (6.7) 参照), 冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ が可換であるときは表象写像 Symb^{-1} を通して直接同型「$\mathrm{Sol} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Diff}$」が得られるていることに注意されたい (図式 (6.9) 参照). 特に冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ が可換である場合は与えられた (G, G', V, W) に対して以下の手順で F-method を用いると良い.

F-method のレシピ ([16, Sect. 4.4]) 冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ が可換であるする.

ステップ 1: $C \in \mathfrak{n}'_+$ に対して, $d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}(C)$ および $\widehat{d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}}(C)$ を求める.

ステップ 2: $\psi \in \mathrm{Hom}_{L'}(V, \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes W)$ を求める.

ステップ 3: $\psi \in \mathrm{Hom}_{L'}(V, \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes W)$, に対して, F-system (6.5) を解く.

ステップ 4: F-system の解 ψ に対して, $\mathrm{Rest}_Y \circ \mathrm{Symb}^{-1}$ を施す.

ステップ 3 において偏微分方程式系 F-system (6.5) を解かなければならないが, 以下の補題 15より, 実際, 冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ が可換であるときは 1 つの微分方程式を解けば十分である.

補題 15 ([11, Lem. 3.4])**.** 冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ が可換であるとき, 以下の $\psi \in \mathrm{Hom}_{L'}(V, \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes W)$ に関する 2 条件は同値である.

(i) 全ての $C \in \mathfrak{n}'_+$ に対して, $(\widehat{d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}}(C) \otimes \mathrm{id}_W)\psi = 0$.

(ii) ある $0 \neq C_0 \in \mathfrak{n}'_+$ に対して, $(\widehat{d\pi_{(\sigma,\lambda)^*}}(C_0) \otimes \mathrm{id}_W)\psi = 0$.

文献 [11] では上記「F-method のレシピ」の手順に沿って微分対称性破れ作用素を構成・分類した. ここでその詳細を書くことはできないが, 例えばステップ 2 では $N \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ に対して, 3 つのベクトル空間のテンソル積 $\bigwedge^i(\mathbb{C}^N) \otimes \bigwedge^j(\mathbb{C}^N) \otimes \mathcal{H}^k(\mathbb{C}^N)$ の $O(N)$ 不変な元の決定が重要になる. ただしここで $\mathcal{H}^k(\mathbb{C}^N)$ は次数 k の調和多項式全体のなす空間を表す. またステップ 3 では補題 15を用いた後の偏微分方程式を「T-saturation」([17, Sect. 3.2]) という手法を用いて, 常微分方程式に置き換え, その解を決定した. この際, (generic な場合において) 9 つの常微分方程式からなる微分方程式系を解くことになるが, それらを変数変換で別の微分方程式系に置き換え, さらにそれまでには知られていなかった Gegenbauer 多項式の三項間関係式 (three-term relations) を新たに求めることでその微分方程式系を解くことに成功した. 詳細は [11, Chaps. 6, 14] を参照されたい.

参考文献

[1] M. Eichler, D. Zagier, *The Theory of Jacobi Forms*, Progr. Math., vol. **55**, v+150 pp, Birkhäuser, 1985.

[2] C.R. Graham, R. Jenne, L.J. Mason, G.A.J. Sparling, Conformally invariant powers of the Laplacian. I. Existence. *J. London Math. Soc.* (2) **46** (1992), pp. 557–565.

[3] T. Ibukiyama, T. Kazumaki, H. Ochiai, Holonomic systems of Gegenbauer type polynomials of matrix arguments related with Siegel modular forms. *J. Math. Soc. Japan*, **64** (2012), pp. 273–316.

[4] A. Juhl, *Families of Conformally Covariant Differential Operators, Q-Curvature and Holography.* Progr. Math., vol. **275**. xiii+490 pp, Birkhäuser, Basel, 2009.

[5] T. Kobayashi, F-method for constructing equivariant differential operators. Contemp. Math., vol. **598**, pp. 141–148, Amer. Math. Soc, 2013.

[6] T. Kobayashi, F-method for symmetry breaking operators. *Diff. Geometry and its Appl.* **33** (2014), pp. 272–289.

[7] T. Kobayashi, A program for branching problems in the representation theory of real reductive groups. Progr. Math., vol. **312**, pp. 277–322, Birkhäuser, 2015.

[8] T. Kobayashi, Birth of new branching problems. In Abstract of the 70th Anniversary Lecture at the MSJ 2016 Autumn Meeting, pp. 65-92. Math. Soc. Japan, 2016.

[9] T. Kobayashi, Residue formula for regular symmetry breaking operators, (preprint), arXiv:1709.05035.

[10] T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner, Vector-valued covariant differential operators for the Möbius transformation. Springer Proc. Math. Stat. vol. **111**, pp. 67–86, Springer, 2015.

[11] T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner, *Conformal Symmetry Breaking Operators for Differential Forms on Spheres*. Lecture Notes in Math., vol. **2170**, ix+192 pp, Springer-Nature, 2016.

[12] T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner, Conformal symmetry breaking operators for anti-de Sitter spaces, preprint, arXiv:1610.09475, to appear in Trends in Math. (Birkhäuser), in press.

[13] T. Kubo, Differential symmetry breaking operators of $O(n, 1)$ for differential forms. In Abstract of the Special Session in Functional Analysis at MSJ 2017 Autumn Meeting, pp. 45–54, Math. Soc. Japan, 2017.

[14] T. Kobayashi, B. Ørsted, Analysis on the minimal representation of $O(p, q)$. I. Realization via conformal geometry. *Adv. Math.* **180** (2003), pp. 486–512.

[15] T. Kobayashi, B. Ørsted, P. Somberg, and V. Souček, Branching laws for Verma modules and applications in parabolic geometry. I. *Adv. Math.*, **285** (2015), pp. 1796–1852.

[16] T. Kobayashi, M. Pevzner, Differential symmetry breaking operators. I. General theory and F-method, *Selecta. Math. (N.S.)*, **22** (2016), pp. 801–845.

[17] T. Kobayashi, M. Pevzner, Differential symmetry breaking operators. II. Rankin–Cohen operators for symmetric pairs, *Selecta. Math. (N.S.)*, **22** (2016), pp. 847–911.

[18] T. Kobayashi, B. Speh, *Symmetry Breaking for Representations of Rank One Orthogonal Groups.* Mem. Amer. Math. Soc., vol. **238**, 118 pp, 2015.

[19] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry breaking for orthogonal groups and a conjecture by B. Gross and D. Prasad, preprint, arXiv:1702.00263.

[20] S. Paneitz, A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **4** (2008), paper 036, 3pp.

[21] D. Zagier, Modular forms and differential operators, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* **104** (1994), no. 1, pp. 57–75.