共形変換群 $O(p,q)$ に関する対称性破れ作用素

小林俊行　(東京大学)
レオンチエフ　アレックス　(東京大学)

小林氏と Speh 氏の $O(n+1,1)\downarrow O(n,1)$ の対称性破れ作用素についての著書 [KS15][1] を高階の群の組 $(O(p+1,q+1), O(p,q+1)$ に一般化することを目指す。以下は小林俊行氏と共同研究を報告する。標準球面の直積 $\mathbb{S}^p\times\mathbb{S}^q$ に、第 1 成分は正定値、第 2 成分は負定値となる計量を与え、更に対蹠点を同一視することによって得られる、符号 (p,q) 擬リーマン多様体を

$$X\equiv X^{p,q}\equiv\left(\mathbb{S}^p\times\mathbb{S}^q\right)/\mathbb{Z}_2$$

を表す。$q=0$ の場合は $X^{p,0}\simeq\mathbb{S}^p$ であり、立体射影の逆写像を一般化することにより、$X^{p,q}$ は平坦な擬リーマン多様体 $\mathbb{R}^{p,q}$ の共形コンパクト化であることがわかる。$\mathbb{R}^{(p+1)+(q+1)}$ 上の符号 $(p+1,q+1)$ をもつ標準二次形式を $Q_{p+1,q+1}$ と表し、$Q_{p+1,q+1}$ を保つ線形変換からなる群を $G=O(p+1,q+1)$ とする。G は X に共形変換群として作用する。共形変換群の一般理論 (Kobayashi-Orsted, Part I, Adv. Math., 2003) より、複素数 λ をパラメータとする表現の族 $I(\lambda)$ を $C^\infty(X)$ 上に定めることができる。簡約リー群の言葉で言い換えると、X は G の（一般化された）旗多様体 G/P と同一視でき、$I(\lambda)$ は極大放物型部分群 $P=MAN$ から誘導された球退化主系列表現である。G の簡約部分群として第 p 座標の固定部分群を G' とすると、G の表現 $I(\lambda)$ と同様に $\nu\in\mathbb{C}$ に対して $G'\simeq O(p,q+1)$ の表現 $J(\nu)$ を $C^\infty(X^{p-1,q})$ 上に定義される。

定義 1. 連続な線形写像 $T: C^\infty(X^{p,q})\to C^\infty(X^{p-1,q})$ で $J(\nu)(g)\circ T=T\circ I(\lambda)(g), \forall g\in G'$ を満たすものを対称性破れ作用素 (SBO) という。

問題 1 (KS15)**.** すべての $\lambda,\nu\in\mathbb{C}$ に対して、対称性破れ作用素を構成し、分類せよ。

$q=0$ の場合には、この問題は [KS15] で完全に解決された。以下では $p,q>0$ の場合には、この問題が解決したことを報告する。手法は [KS15] で開発された手法を用いるが、p,q が一般の場合には、構成がやや複雑になる。$X=X^{p,q}\simeq G/P, Y:=X^{p-1,q}\simeq G'/P'$ とおき、その稠密な座標近傍 $\mathbb{R}^{p,q}\supset\mathbb{R}^{p-1,q}$（表現論の言葉では N-picture）を考える。C を $\mathbb{R}^{p,q}$ の錐 $Q_{p,q}=0$ を X 内で閉包をとって定まる閉集合、o を $\mathbb{R}^{p,q}$ の原点の X における像とする。このとき両側乗余類 $P'\backslash G/P$ は以下の形で与えられる。

定理 1. C、Y、$C\cap Y$、$\{o\}$ が両側剰余類 $P'\backslash G/P$ の閉集合となる。

[KS15] の一般論を用いて、以下のの 2 つの写像 Op と $\mathcal{S}$ を定義する：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda),J(\nu)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[rr, bend left] & \left(\mathcal{D}'(G/P,\mathcal{L}_{n-\lambda})\otimes\mathbb{C}_\nu\right)^{P'} \arrow[r, "\mathcal{S}", "F\mapsto\mathrm{supp}(F)"'] \arrow[d, "\mathrm{rest}"', "\simeq"] & 2^{P'\backslash G/P} \\
 & \mathcal{S}ol(\mathbb{R}^{p,q};\lambda,\nu)\subset\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{p+q}) \arrow[ul, "\simeq", "\mathrm{Op}"'] &
\end{tikzcd}$$

定理 2 (対称性破れ作用素の構成)**.** *次のような対称性破れ作用素が構成される（well-definedness も定理の一部である）。*

regular SBO: $(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2$ に正則に依存する対称性破れ作用素 $R^X_{\lambda,\nu}: I(\lambda)\to J(\nu)$。

$R^X_{\lambda,\nu}$ はまず、$\mathrm{Re}(\lambda+\nu)>n$ かつ $\mathrm{Re}\,\nu<0$ のとき局所可積分関数 $|x_p|^{\lambda+\nu-n}\,|Q_{p,q}|^{-\nu}$ の定数倍を核関数とし、$(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2$ に関する以下のような解析接続として定義される。

$$\mathrm{Op}^{-1}(R^X_{\lambda,\nu})=N(\lambda,\nu)|x_p|^{\lambda+\nu-n}\,|Q_{p,q}|^{-\nu},\quad N^{-1}(\lambda,\nu):=\Gamma\left(\tfrac{\lambda-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{\lambda+\nu-n+1}{2}\right);$$

なお、*generic*な$(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2$に対しては$\mathcal{S}(R^X_{\lambda,\nu})=X$となる。さらに$\left\{(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2 \middle| R^X_{\lambda,\nu}=0\right\}$は$\mathbb{C}^2$における可算無限集合であって、具体的に決定できる。

Yに付随する特異積分: $k:=\frac{1}{2}(n-1-\lambda-\nu)\in\mathbb{N}$のとき$\nu\in\mathbb{C}$に正則に依存する対称性破れ作用素$R^Y_{\lambda,\nu}\neq 0$。核超関数は

$$\mathrm{Op}^{-1}(R^Y_{\lambda,\nu})=N_Y(\lambda,\nu)\delta^{(2k)}(x_p)\times|Q_{p,q}|^{-\nu}.$$

Cに付随する特異積分: $\nu\in -1-2\mathbb{N}$とする。$\lambda\in\mathbb{C}$に正則に依存する対称性破れ作用素$R^C_{\lambda,\nu}\neq 0$。核超関数は

$$\mathrm{Op}^{-1}(R^C_{\lambda,\nu})=N_C(\lambda,\nu)|x_p|^{\lambda+\nu-n+1}\times\delta^{(-1-\nu)}(Q_{p,q}).$$

微分対称性破れ作用素: $k:=\frac{1}{2}(\nu-\lambda)\in\mathbb{N}$のとき$\lambda\in\mathbb{C}$ に正則に依存する対称性破れ作用素$R^{\{0\}}_{\lambda,\nu}\neq 0$。

$$R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}=\tilde{C}^{\lambda-\frac{n-1}{2}}_{\nu-\lambda}\left(-\Delta_{\mathbb{R}^{p-1,q}},\frac{\partial}{\partial x_p}\right)$$

ここで$\tilde{C}(s,t)$は[KS15,(16.3)][1]で与えられた二変数多項式。

$S=Y,C$に対して、$N_S(\lambda,\nu)$はΓ関数で表示される。genericには$\mathcal{S}\left(R^S_{\lambda,\nu}\right)=S$。

定理 3 (対称性破れ作用素の分類)**.** $p>1$に対して

$$\mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda),J(\nu))=\begin{cases}\mathbb{C}R^X_{\lambda,\nu}\oplus\mathbb{C}R^{\{0\}}_{\lambda,\nu}, & (\lambda,\nu)\in /\!/\cap\,|||\\ \mathbb{C}R^X_{\lambda,\nu}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

系 1. $\dim\mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda),J(\nu))\in\{1,2\}\quad(\forall\lambda,\forall\nu\in\mathbb{C})$. 等号成立 $\iff$ $(\lambda,\nu)\in /\!/\cap\,|||$。ここで、$/\!/:=\{(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2|\lambda-\nu=-2k\in-2\mathbb{N}\}$、$|||:=\{(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2\mid\nu\in-2\mathbb{N}\cup(q+1+2\mathbb{Z})\}$。

定理 4 (K不変ベクトルにおける"固有値")**.** 正規化されたK不変ベクトル$\mathbb{1}_\lambda\in I(\lambda)$と$K'$不変ベクトル$\mathbb{1}_\nu\in I(\nu)$に対して

$$R^X_{\lambda,\nu}\mathbb{1}_\lambda=2^{1-\lambda}\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{q}{2}+\frac{\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q-\nu+1}{2}\right)}\mathbb{1}_\nu\quad\text{が成り立つ。}$$

定理 5 (留数定理)**.** (λ,ν)が特殊値のとき$R^X_{\lambda,\nu}$は$R^Y_{\lambda,\nu}$,$R^C_{\lambda,\nu}$,$R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}$の定数倍となる。定数倍の係数はすべて明示的に決定される。

定理 6 (factorization identities)**.** $\tilde{\mathbb{T}}_\lambda:I(\lambda)\to I(n-\lambda)$ を*Knapp-Stein*作用素とする。$(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2$に対して$\tilde{\mathbb{T}}_{n-1-\nu}\circ R^X_{\lambda,n-1-\nu}=q^{TX}_X(\lambda,\nu)R^X_{\lambda,\nu}$と$R^X_{n-\lambda,\nu}\circ\tilde{\mathbb{T}}_\lambda=q^{XT}_X(\lambda,\nu)R^X_{\lambda,\nu}$となる。定数$q^{TX}_X(\lambda,\nu)$,$q^{XT}_X(\lambda,\nu)$明示式が決定される。

さらに、$I(\lambda)$や$J(\nu)$のsubqutientとして現わるZuckermanの導来関手加群$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$に関する対称性破れ作用素の存在条件が得られるが、これは別の機会に述べたい。

---

[1] T. Kobayashi and B. Speh. Symmetry breaking for representations of rank one orthogonal groups. *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol.**238**, 2015.