# 球面上の微分形式における differential symmetry breaking operator の構成および分類について


小林　俊行　(東京大学・Kavli IPMU)
久保　利久　(龍谷大学)
Michael Pevzner　(Université de Reims-Champagne-Ardenne)


滑らかな多様体 $X$ 上の $i$ 次微分形式から, $X$ の部分多様体 $Y$ 上の $j$ 次微分形式への線型写像で, 何らかの不変性を満たすものを考える. 例えば, 外微分 $d$ は微分同相写像と可換であり, 余微分 $d^*$ や ($Y$ が余次元 1 の時) 法ベクトル場に関する内部積 $\iota_{N(Y)}$ などは共形変換に関するある不変性を有する.

ここでは $X$ がリーマン多様体のときに共形不変な微分作用素 $\mathcal{E}^i(X) \to \mathcal{E}^j(Y)$ を主題とする. もしこのような微分作用素が普遍的に構成できるとすれば, 共形変換群が特に大きいモデル空間 $(X, Y) = (S^n, S^{n-1})$ に対してもそのような作用素が存在するはずである. この問題を半単純リー群の表現論の言葉に翻訳し, さらに最近小林俊行氏によって開発された「F-method」(文献 [2]) を用いることにより, 今回, モデル空間に対して共形不変微分作用素を完全に分類し, またその具体的な式まで決定することができた. 本講演ではそのことについて報告する.

まず, 本講演における主問題を共形幾何の言葉で定式化する. $(X, g)$ をリーマン多様体とし, $G = \mathrm{Conf}(X)$ を $X$ の共形変換群とする. すなわち, $G$ の元 $\varphi$ は $X$ の微分同相写像であり, $\varphi$ による metric tensor $g$ の引き戻しが正の定数倍になるときを言う. したがって, ある正値関数 $\Omega \in C^\infty(G \times X)$ (*conformal factor*) が存在し, 次式が成り立つ.

$$\varphi^* g_{\varphi(x)} = \Omega(\varphi, x)^2 g_x \quad (\varphi \in G, x \in X).$$

さて群 $G$ は引き戻しによって, $\mathcal{E}^i(X)$ $(0 \leq i \leq \dim X)$ に作用する. この作用は conformal factor $\Omega$ の複素冪乗を用いて, 連続変形できる. さらに $G$ が $X$ の向き付けをどのように変えるかの情報も取り込んで, $u \in \mathbb{C}$, $\delta \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ をパラメータとする表現

$$\varpi^{(i)}_{u,\delta}(\varphi)\alpha := or(h)^\delta \Omega(\varphi^{-1}, \cdot)^u \varphi^* \alpha, \quad (\varphi \in G)$$

が定義できる. 共形群 $G$ のこの表現 $(\varpi^{(i)}_{u,\delta}, \mathcal{E}^i(X))$ を単に $\mathcal{E}^i(X)_{u,\delta}$ とも表すこととする.

次に群 $G$ の部分群として, $X$ の部分多様体 $Y$ を保つ群

$$G' := \mathrm{Conf}(X; Y) \equiv \{h \in G : h \cdot Y = Y\}$$

を考える. このとき, $G'$ は $Y$ に共形変換として作用するので, 上記と同様に $Y$ 上の $j$ 次微分形式の空間 $\mathcal{E}^j(Y)$ $(0 \leq j \leq \dim Y)$ に群 $G'$ の表現の族 $\varpi^{(j)}_{v,\varepsilon}$ $(v \in \mathbb{C}, \varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を定めることができる. この表現の族 $(\varpi^{(j)}_{v,\varepsilon}, \mathcal{E}^j(Y))$ を $\mathcal{E}^j(Y)_{v,\varepsilon}$ とも表すこととする.

本研究の研究対象は二つの $G'$ の表現 $\varpi^{(i)}_{u,\delta}|_{G'}$, $\varpi^{(j)}_{v,\varepsilon}$ と可換である微分作用素 $\mathcal{E}^i(X) \to \mathcal{E}^j(Y)$ である. (ここで, $\varpi^{(i)}_{u,\delta}|_{G'}$ は $G$ の表現 $\varpi^{(i)}_{u,\delta}$ の $G'$ への制限を意味する.) このような作用素を小林俊行氏は *symmetry breaking operator* と名付けた. 本稿では, この differential symmetry breaking operator のなす空間を $\mathrm{Diff}_{G'}(\mathcal{E}^i(X)_{u,\delta}, \mathcal{E}^j(Y)_{v,\varepsilon})$ と表す.

次の問題 A, B をここに提起する.

**問題 A.** 非自明な *differential symmetry breaking operator* が存在するパラメータ $(i, j, u, v, \delta, \varepsilon)$ の必要十分条件を求めよ. さらに $\mathrm{Diff}_{G'}(\mathcal{E}^i(X)_{u,\delta}, \mathcal{E}^j(Y)_{v,\varepsilon})$ の次元を決定せよ.

**問題 B.** $\mathrm{Diff}_{G'}(\mathcal{E}^i(X)_{u,\delta}, \mathcal{E}^j(Y)_{v,\varepsilon})$ の元を具体的に構成せよ.

例えば, $X=Y$, $G=G'$, $i=j=0$ のケースについては山辺作用素, Paneitz 作用素, GJMS 作用素, $(X,Y)=(S^n,S^{n-1})$, $i=j=0$ では Juhl 作用素 (文献 [1]) などが知られている.

本研究では, $X \neq Y$ のモデルケースである $(X,Y)=(S^n,S^{n-1})$ の場合について考え, 問題 A, Bとも解決した. まず分類結果は次のようになる.

**定理 1.** ([3, Thm 1.1]) *$n \geq 3$ とし, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n-1$, $u,v \in \mathbb{C}$, $\delta,\varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする. このとき, $(i,j,u,v,\delta,\varepsilon)$ における次の 3つの条件は同値である.*

(i) $\mathrm{Diff}_{O(n,1)}(\mathcal{E}^i(S^n)_{u,\delta}, \mathcal{E}^j(S^{n-1})_{v,\varepsilon}) \neq \{0\}$.
(ii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Diff}_{O(n,1)}(\mathcal{E}^i(S^n)_{u,\delta}, \mathcal{E}^j(S^{n-1})_{v,\varepsilon}) = 1$.
(iii) $j \in \{i-2, i-1, i, i+1\} \cup \{n-i+1, n-i, n-i-1, n-i-2\}$,
$(u,v,\delta,\varepsilon)$ : 正整数条件やパリティを含む明示条件 (省略).

ホッジ双対により, (iii) では $j=i-1$ および $j=i+1$ の場合のみを考えれば良い. 前者は分類に連続パラメータが含まれ, 後者は離散パラメータのみで分類される.

前者に対して, 問題Bの解を立体射影を通じて平坦な座標 $(X,Y) \approx (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-1})$ で記述する. まず $\widetilde{C}^{\mu}_{a}(t)$ を $a$ 次の Gegenbauer 多項式とし, $(I_a\widetilde{C}^{\mu}_{a})(y,z) = y^{\frac{a}{2}}\widetilde{C}^{\mu}_{a}\left(\frac{z}{\sqrt{y}}\right)$ とおいて 2 変数 $y,z$ に関する $a$ 次の斉次式を定める. さらに形式的に $y$ に $-\Delta_{\mathbb{R}^{n-1}}$ を, $z$ に $\frac{\partial}{\partial x_n}$ を代入して得られるスカラー値微分作用素を $\mathcal{D}^{\mu}_{a}$ と書く. このとき, パラメータ $u \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{N}$ に対し, 線型写像の族 $\mathcal{D}^{i\to i-1}_{u,a}\colon \mathcal{E}^i(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}^{i-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ を次に定義する.

$$\mathcal{D}^{i\to i-1}_{u,a} := \mathrm{Rest}_{x_n=0} \circ \left( -\mathcal{D}^{\mu+1}_{a-2} d_{\mathbb{R}^n} d^*_{\mathbb{R}^n} \iota_{\frac{\partial}{\partial x_n}} - \gamma(\mu,a)\mathcal{D}^{\mu+1}_{a-1} d^*_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{2}(u+2i-n)\mathcal{D}^{\mu}_{a}\iota_{\frac{\partial}{\partial x_n}} \right).$$

ただし, $\mu =: u+i-\frac{1}{2}(n-1)$, $\gamma(\mu,a) := 1$ ($a$: 奇数), $\mu+\frac{a}{2}$ ($a$: 偶数) とする. どのような $(i,a,u)$ に対しても 0 にならないよう $\mathcal{D}^{i\to i-1}_{u,a}$ を正規化した作用素を $\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to i-1}_{u,a}$ と表す.

**定理 2** ($j=i-1$)**.** ([3, Thm 1.5]) *$1 \leq i \leq n$ とする, また $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ および $(\delta,\varepsilon) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ は $v-u \in \mathbb{N}_+$, $\delta \equiv \varepsilon \equiv v-u \bmod 2$ を満たすとする.*

(1) *微分作用素 $\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to i-1}_{u,v-u-1}$ は, $\mathbb{R}^n$ の共形的コンパクト化である $S^n$ 上の作用素へ拡張され, また非自明な $O(n,1)$-準同型 $\mathcal{E}^i(S^n)_{u,\delta} \to \mathcal{E}^{i-1}(S^{n-1})_{v,\varepsilon}$ を誘導する.*

(2) *$\mathcal{E}^i(S^n)_{u,\delta}$ から $\mathcal{E}^{i-1}(S^{n-1})_{v,\varepsilon}$ への任意の $O(n,1)$-同変な微分作用素は (1) における微分作用素 $\widetilde{\mathcal{D}}^{i\to i-1}_{u,v-u-1}$ の定数倍として与えられる.*

今回 $(X,Y)=(S^n,S^{n-1})$ に対し, 問題 A, B (共形幾何) を解決するにあたって, それらを一旦, 主系列表現 (表現論) の問題として捉え, さらに小林–Pevzner 氏が文献 [4] で Rankin–Cohen bracket の高次元化を成功させた際にも用いた「代数的フーリエ変換」（F-method）を証明で使用した. 本講演ではその F-method についても触れたいと思う.

## 参考文献


[1] A. Juhl, *Families of Conformally Covariant Differential Operators, Q-Curvature and Holography.* Progr. Math., **275**. Birkhäuser, Basel, 2009.

[2] T. Kobayashi, F-method for constructing equivariant differential operators. *Contemporary Mathematics*, **598**, (2013), pp. 141–148, *Amer. Math. Soc.*

[3] T. Kobayashi, T. Kubo, and M. Pevzner, Conformal symmetry breaking operators for differential forms on spheres, preprint (2016), arXiv:1605.09272 (170 ページ)

[4] T. Kobayashi, M. Pevzner, Differential symmetry breaking operators. I. General theory and F-method; II. Rankin–Cohen operators for symmetric pairs, *Selecta. Math. (N.S.)*, **22**, (2016), pp. 801–845, 847–911.