Covariant differential operators and the Rankin–Cohen bracket

小林俊行 (Toshiyuki KOBAYASHI)[a] , 久保利久 (Toshihisa KUBO)[b] ,
and
Michael PEVZNER[c]

概 要

In this notes we find explicit formulas for certain $SL(2,\mathbb{R})$-intertwining differential operators from $C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2)$ to $C^\infty(\mathbb{R})$. The Rankin–Cohen bracket, Jacobi polynomials, and Gegenbauer polynomials play a key role.

1 序

本稿では, 分岐則に関する問題について考える. 周知の通り, 分岐則の問題は, その由緒の正しさから, 小林俊行氏を始め, 様々な人々によって研究されている. 特に最高ウェイトなどのパラメータを用いて, 抽象的に分解するよう研究がなされて来たが, 近年, 離散分解可能な場合において, 群 G の表現から部分群 G' に制限した際に表われる既約表現への「制限写像」(*symmetry breaking operator*) を具体的に書き下し, 分岐則の構造をより詳しく調べる試みがなされ始めた. 一般に symmetry breaking operator を求める問題は抽象的に分規則を与える問題に比べ, 難しい. 詳しくは, 例えば, [5, 6, 7] を参照して頂きたい.

さて本稿はこの symmetry breaking operator を求める問題を取り扱う. 特に $C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2)$ から $C^\infty(\mathbb{R})$ へのある $SL(2,\mathbb{R})$-同変な微分作用素 (*differential symmetry breaking operator*) を求める. そこで問題の設定を明らかにすべく, まずこれから本稿の主問題を書くことにする.

与えられた $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, 群準同型 $\psi_\lambda : \mathbb{C}^\times \to GL(2,\mathbb{R})$ を

$$z = re^{i\theta} \mapsto r^\lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と定める. 次に $\mathbb{C}^2$ 値を持つ $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 上の関数 $\vec{F}$, そして $h^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ に対して, 関数 $\rho_\lambda(h)\vec{F}$ を

$$(\rho_\lambda(h)\vec{F})(z) := \psi_\lambda\left((cz+d)^{-2}\right)\vec{F}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \tag{1.1}$$

と定義する. ただし, ここに z は $cz+d \neq 0$ を満たす $\mathbb{C}$ の元. また $\mathbb{R}^2$ 上の 2 つの微分作用素 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ は線形作用素

$$\mathcal{D} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad (f,g) \mapsto (\mathcal{D}_1 f)(x,0) + (\mathcal{D}_2 g)(x,0)$$

をもたらす. この新たな「微分作用素」$\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D} := \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$$

[a]Kavli IPMU (WPI), 東京大学大学院数理科学研究科 (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo);
E-mail address: `toshi@ms.u-tokyo.ac.jp`,
[b]東京大学大学院数理科学研究科 (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo);
E-mail address: `toskubo@ms.u-tokyo.ac.jp`,
[c]Laboratoire de Mathématiques de Reims, Université de Reims-Champagne-Ardenne, Reims, France;
E-mail address: `pevzner@univ-reims.fr`.

と書くこととする．このとき本稿の主問題は次の通りである．

問題 A. $\lambda,\nu \in \mathbb{C}$ を与えられた 2 つの複素数とする．このとき，全ての $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2), h^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$，そして $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ に対し，

$$\big(\mathcal{D}(\rho_\lambda(h)\vec{F})\big)(x) = |cx+d|^{-2\nu}(\mathcal{D}\vec{F})\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) \tag{$\mathcal{M}_{\lambda,\nu}$}$$

を満たす微分作用素 $\mathcal{D} = \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ の具体的な式を求めよ．

ここで [4] で問題 A の同値な formulation がいくつか紹介されていることを述べておく．実際，論文 [4] では，問題 A はまず twisted inversion と同変な定数係数の微分作用素を求める問題として与えられている．詳しくは [4] を参照されたい．またこの微分作用素 $\mathcal{D}$ は 2 つの Verma 加群のテンソル積の分規則に強く関係していることに注意されたい ([4], もしくは本稿の第 6 節，とりわけ (6.1) を参照)．

さて次に $(\mathcal{M}_{\lambda,\nu})$ を満たす微分作用素 $\mathcal{D} = \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ の例をいくつか見てみよう．

例 1.1. (0) $\nu = \lambda$: 微分作用素

$$\mathcal{D}_{\lambda,\nu} := \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (\mathrm{id}, 0)\,,$$

つまり

$$\mathcal{D}_{\lambda,\nu}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x) = f(x,0)$$

は $\nu = \lambda$ に対し，$(\mathcal{M}_{\lambda,\nu})$ を満たす．ここで id は恒等写像.

(1) $\nu = \lambda$: 微分作用素

$$\mathcal{D} := \mathrm{Rest}_{y=0} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x}, \lambda\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

つまり

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,0) + \lambda\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,0)$$

は $\nu = \lambda + 1$ に対し，$(\mathcal{M}_{\lambda,\nu})$ を満たす．

(2) $\nu = \lambda + 2$: 微分作用素

$$\mathcal{D} = \mathrm{Rest}_{y=0} \circ \left(2(2\lambda+1)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, (\lambda-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\lambda+1)(2\lambda+1)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

つまり

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(x) = 2(2\lambda+1)\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x,0) + (\lambda-1)\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x,0) + (\lambda+1)(2\lambda+1)\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x,0)$$

は $\nu = \lambda + 2$ に対し，$(\mathcal{M}_{\lambda,\nu})$ を満たす．

1.1 主結果

それではこれから本稿の主結果について述べる．与えられた $\lambda,\nu \in \mathbb{C}$ に対し，$\mathrm{Diff}(\lambda,\nu)$ を

$$\mathrm{Diff}(\lambda,\nu) := \{\mathcal{D} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}) : \mathcal{D} \text{ は } (\mathcal{M}_{\lambda,\nu}) \text{ を満たす微分作用素}\}$$

と定める．また，後に詳しく述べるが，$\mathcal{C}_\ell^\alpha$ を「膨らませた (inflated)」Gegenbauer 多項式 $C_\ell^\alpha(x,y)$ より作られる ℓ 階の斉次微分作用素 (homogeneous differential operator) とする ((5.1), (5.2), および (5.3) を参照)．このとき，本稿の主結果は次の通りである．

定理 1.2. [4, Theorem A] 与えられた $\lambda \in \mathbb{C}$ および $a \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ に対して，*2* つの微分作用素 $\mathcal{D}_1^{(\lambda,a)}$, $\mathcal{D}_2^{(\lambda,a)}$ を次に定める：$a \in \{1, 2, 3, \ldots, \}$ に対し，

$$\mathcal{D}_1^{(\lambda,a)} := a(2\lambda + a - 1)\frac{\partial}{\partial x} \circ \mathcal{C}_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{D}_2^{(\lambda,a)} := \left(2\lambda^2 + 2(a-1)\lambda + a(a-1)\right)\frac{\partial}{\partial y} \circ \mathcal{C}_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}} + (\lambda - 1)(2\lambda + 1)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \circ \mathcal{C}_{a-2}^{\lambda+\frac{3}{2}}. \tag{1.3}$$

また $a = 0$ に対しては

$$\mathcal{D}_1^{(\lambda,0)} := \mathrm{id}, \quad \mathcal{D}_2^{(\lambda,0)} := 0. \tag{1.4}$$

このとき *2* つの微分作用素

$$\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a} := \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (\mathcal{D}_1^{(\lambda,a)}, \mathcal{D}_2^{(\lambda,a)})$$
$$\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}^{\vee} := \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (-\mathcal{D}_2^{(\lambda,a)}, \mathcal{D}_1^{(\lambda,a)}),$$

は $(\mathcal{M}_{\lambda,\nu})$ を満たす．つまり，

$$\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a},\ \mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}^{\vee} \in \mathrm{Diff}(\lambda, \lambda + a).$$

特に，$\mathrm{Diff}(\lambda, \lambda + a) \neq \{0\}$．さらに $2\lambda \notin -\{0, 1, 2, \ldots\}$ のとき

$$\mathrm{Diff}(\lambda, \nu) = \begin{cases} \mathbb{C}\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a} \oplus \mathbb{C}\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}^{\vee} & \nu = \lambda + a, \\ \{0\} & \nu \neq \lambda + a. \end{cases} \tag{1.5}$$

1.2 Holomorphic trick

さて (1.2), (1.3), および (1.4) の微分作用素をどのように求めたかだが，*Rankin–Cohen bracket* と呼ばれる双微分作用素 (bidifferential operator) $\mathcal{RC}_{\lambda_1,\lambda_2}^{a}$ を用いた ((3.2) 参照)．この双微分作用素 $\mathcal{RC}_{\lambda_1,\lambda_2}^{a}$ は，特に重み λ_1, λ_2 の正則モジュラー形式から，重み $\lambda_1 + \lambda_2 + 2a$ の正則モジュラー形式をもたらすことで，元々は保型形式の理論で研究された．また表現論的観点からは，$\mathcal{RC}_{\lambda_1,\lambda_2}^{a}$ は $SL(2, \mathbb{R})$ の 2 つの正則離散系列表現のテンソル積から既約成分への射影作用素とみなせる．論文 [6] の Introduction に Rankin–Cohen bracket に関する研究についてよくまとめられているので，詳しくはそれを参照されたい．

ところで Rankin–Cohen bracket $\mathcal{RC}_{\lambda_1,\lambda_2}^{a}$ を使用したと上述したが，その双微分作用素は特に 2 つ正則離散系列表現のテンソル積を定義域に持つため，我々の求めたい微分作用素，つまり $C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2)$ から $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ への微分作用素を求めるには何かしらの工夫が必要になる．ここで鍵となるアイデアは，$\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ から $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \otimes \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ への totally real embedding $\iota : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C} \otimes \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, $z \mapsto (z, \bar{z})$ である．より詳しく述べると，それから得られる $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \otimes \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上のある直線束の正則切断の空間から $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上の直線束の滑らかな切断の空間への単準同型の使用である ((4.4) および (4.5) を参照)．本稿ではこのアイデアを *holomorphic trick* と呼ぶことにした．holomorphic trick を用いる上で，$\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上のベクトル束として，共形直線束 $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{conf}}$, 滑らかな直線束 $\mathcal{L}_{n,\lambda}$, 正則直線束 $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{hol}}$, および余接ベクトル束の複素化 $(T^*(\mathbb{P}^1\mathbb{C})) \otimes \mathbb{C}$ を用いた．詳しくは第 4 節，特に命題 4.3と図式 (4.4) および (4.5) を見て頂きたい．

1.3 本稿の構成

それではこれから本稿の構成について述べる．本稿はこの序説を含めて，全 6 節で構成される．まず holomorphic trick への準備として，$\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上の直線束について簡単に復習しておく．第 2 節では共形直線束

$\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{conf}}$ に触れ, 滑らかな直線束 $\mathcal{L}_{n,\lambda}$, そして正則直線束 $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{hol}}$ は第 3 節で考える．また第 3 節では Rankin–Cohen bracket $\mathcal{RC}_{\lambda_1,\lambda_2}^a$ についても述べる．

余接ベクトル束の複素化 $(T^*(\mathbb{P}^1\mathbb{C}))\otimes\mathbb{C}$ については第 4 節で簡単に触れる．この節の目的は holomorphic trick について議論を展開することである．特に, $\mathcal{D}_1^{(\lambda,a)}$, $\mathcal{D}_2^{(\lambda,a)}$ を holomorphic trick から得られるある微分作用素として定義し ((4.7), (4.8) を参照), 全ての $\lambda\in\mathbb{C}$ および $a\in\{0,1,2,\ldots\}$ に対して, $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}$, $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}^\vee\in\mathrm{Diff}(\lambda,\lambda+a)$ となることを示す (命題 4.5, 4.6)．ところで, ここではまだ (1.2), (1.3), および (1.4) の式は与えていない. それらの式は第 5 節で Jacobi 多項式, そして Gegenbauer 多項式を用いて与える (定理 5.4).

最後の節である第 6 節では, $(\mathcal{M}_{\lambda,\nu})$ を満たす微分作用素の分類について考える．特に $2\lambda\notin\{0,1,2,\ldots\}$ の条件の元で, 2 つの Verma 加群のテンソル積の分岐則を用い, (1.5) を系 6.3として求める．

記号: $\mathbb{N}:=\{0,1,2,\ldots\}$, $\mathbb{N}_+:=\{1,2,\ldots\}$

2 $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上の共形直線束 $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{conf}}$

この節の目的は $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上の共形直線束 $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{conf}}$ について考察することである．$\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ を考えるにあたって, まず一般の場合について考える．

2.1 滑らかなリーマン多様体 X 上の共形直線束 $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{conf}}$

X をリーマン計量 g を持つ滑らかなリーマン多様体とし, G を X に共形的に作用する群とする．ここで G の作用が**共形的** (*conformal*) であるとは, 正値を持つ $G\times X$ 上のある滑らかな関数 Ω (*confomal factor*) が存在して, 全ての $h\in G$, $x\in X$ に対して,

$$h^*(g_{h\cdot x})=\Omega(h,x)^2 g_x$$

を満たすことである．また与えられた $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して, X 上の G-同変な直線束 $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{conf}}$ を G が直積 $X\times\mathbb{C}$ に

$$(x,u)\mapsto(h\cdot x,\Omega(h,x)^{-\lambda}u)$$

に作用するよう定義する (ここで h は G の元)．このとき G は $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{conf}}$ の滑らかな切断全体のなす空間 $\mathcal{E}_\lambda(X):=C^\infty(X,\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{conf}})$ に正則表現で作用する．直線束 $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{conf}}\to X$ は位相的には自明な直線束であるので, $\mathcal{E}_\lambda(X)$ を $C^\infty(X)$ と同一視することとする．このとき, $\mathcal{E}_\lambda(X)$ 上の正則表現は $C^\infty(X)$ 上の multiplier representation ϖ_λ となり, $h\in G$, $f\in C^\infty(X)$ に対して,

$$\big(\varpi_\lambda(h)f\big)(x)=\Omega(h^{-1},x)^\lambda f(h^{-1}\cdot x) \tag{2.1}$$

で与えられる．この表現 $(\varpi_\lambda,C^\infty(X))$ の基本的な性質については [3] を参照されたい．

n を X の次元とし, $0\le i\le n$ に対して, $\wedge^i T^*X$ を余接ベクトル束 T^*X の i 次外積からなるベクトル束とする．このとき $\wedge^i T^*X$ の切断 ω は X の微分 i 形式であり, G は $\mathcal{E}^i(X):=C^\infty(X,\wedge^i T^*X)$ に微分形式の引き戻しとして作用する．つまり, この $\mathcal{E}^i(X)$ 上の G の作用を ϖ_i とすると, $h\in G$, $\omega\in\mathcal{E}^i(X)$ に対して, 作用 ϖ_i は

$$\varpi_i(h)\omega=(h^{-1})^*\omega$$

で与えられる．より一般的に, $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{conf}}\otimes\wedge^i T^*X$ は G-同変な X 上のベクトル束であり, 滑らかな切断全体のなす空間

$$\mathcal{E}_\lambda^i(X):=C^\infty(X,\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{conf}}\otimes\wedge^i T^*X) \tag{2.2}$$

上の G の正則表現を $\varpi_{\lambda,i}$ で表すこととする．この空間 $\mathcal{E}_\lambda^i(X)$ は 4.1節で特に $i=1$ の場合に改めて触れる．

2.2 $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上の共形直線束 $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{conf}}$

それでは今から 2.1節で展開した一般論を $X=\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ の場合について考えよう．まず $S^2\subset\mathbb{R}^3$ のステレオグラフ射影

$$S^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\cup\{\infty\}$$
$$(p,q,r)\mapsto \frac{p+\sqrt{-1}q}{1+r}$$

を用いて, $\mathbb{P}^1\mathbb{C}\cong S^2$ にリーマン計量 g を与える．このとき, $u,v\in T_z\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ に対して,

$$g(u,v)=\frac{4}{(1+|z|^2)^2}(u,v)_{\mathbb{R}^2}. \tag{2.3}$$

また $SL(2,\mathbb{C})$ はメビウス変換

$$\mathbb{P}^1\mathbb{C}\to\mathbb{P}^1\mathbb{C},\quad z\mapsto g\cdot z=\frac{az+b}{cz+d},\quad g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$$

によって $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ に共形的に作用し, リーマン計量 (2.3) に対し, conformal factor

$$\Omega(g,z)=|cz+d|^{-2} \tag{2.4}$$

を持つ．従って, (2.1), (2.4) より, $h^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$, $f\in\mathcal{E}_\lambda(\mathbb{P}^1\mathbb{C})\cong C^\infty(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$ に対して, $\varpi_\lambda(h)f$ は

$$\big(\varpi_\lambda(h)f\big)(z)=|cz+d|^{-2\lambda}f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

と与えられる．

3 The Rankin–Cohen bracket $\mathcal{RC}_{\lambda_1,\lambda_2}^a$

この節では双微分作用素 $\mathcal{RC}_{\lambda_1,\lambda_2}^a$ について考察する．そのために初めに $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上の滑らかな直線束 $\mathcal{L}_{n,\lambda}$, および正則直線束 $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{hol}}$ から議論を始める．

3.1 $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上の滑らかな直線束 $\mathcal{L}_{n,\lambda}$

まず $G_\mathbb{C}=SL(2,\mathbb{C})$ の Borel 部分群 $B_\mathbb{C}$ を

$$B_\mathbb{C}:=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ c & \frac{1}{a}\end{pmatrix} : a\in\mathbb{C}^\times, c\in\mathbb{C}\right\}$$

と定義し, 写像 $hB_\mathbb{C}\mapsto h\cdot 0$ を通して, $G_\mathbb{C}/B_\mathbb{C}\cong\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ と見なす．(ここで「$h\cdot 0$」は $G_\mathbb{C}$ の $\mathbb{P}^1\mathbb{C}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上のメビウス変換による作用.)

次に与えられた $n\in\mathbb{Z}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ に対し, $B_\mathbb{C}=T_\mathbb{C}N_\mathbb{C}=\mathbb{C}^\times N_\mathbb{C}$ の 1 次元表現 $\chi_{n,\lambda}:B_\mathbb{C}\to\mathbb{C}^\times$ を

$$\chi_{n,\lambda}:\begin{pmatrix}\frac{1}{re^{i\theta}} & 0\\ c & re^{i\theta}\end{pmatrix}\mapsto e^{in\theta}r^\lambda$$

と定義し, また $\mathcal{L}_{n,\lambda}:=G_\mathbb{C}\times_{B_\mathbb{C}}\chi_{n,\lambda}$ を

$$(g,u)\sim(gb^{-1},\chi_{n,\lambda}(b)u)\qquad(b\in B_\mathbb{C}) \tag{3.1}$$

から定まる $G_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ の同値類の集合として定義された $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \cong G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$ 上の $G_{\mathbb{C}}$-同変な滑らかな等質直線束とする．($G_{\mathbb{C}}$ は $\mathcal{L}_{n,\lambda} = G_{\mathbb{C}} \times_{B_{\mathbb{C}}} \chi_{n,\lambda}$ に $g \cdot (x, u) = (gx, u)$ で作用.) $\mathcal{L}_{n,\lambda} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ が $G_{\mathbb{C}}$-同変であることから, $G_{\mathbb{C}}$ は滑らかな切断全体のなす空間 $C^\infty(\mathbb{P}^1\mathbb{C}, \mathcal{L}_{n,\lambda})$ に正則表現 $\pi_{n,\lambda}$ で作用する．ここで $\mathbb{C}$ が $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の開部分集合であり, 稠密な部分集合であることに注意すると, $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への制限によって, 単射 $C^\infty(\mathbb{P}^1\mathbb{C}, \mathcal{L}_{n,\lambda}) \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{C})$ が得られる．$C^\infty_\chi(\mathbb{C})$ をこの単射における $C^\infty(\mathbb{P}^1\mathbb{C}, \mathcal{L}_{n,\lambda})$ の像とすると, $C^\infty_\chi(\mathbb{C})$ において, 正則表現 $\pi_{n,\lambda}$ は multiplier representation

$$\bigl(\pi_{n,\lambda}(h)F\bigr)(z) = \left(\frac{cz+d}{|cz+d|}\right)^{-n} |cz+d|^{-\lambda} F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \qquad h^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

として与えられる．

3.2 $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上の正則直線束 $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{hol}}$

$\lambda \in \mathbb{Z}$ のとき $\chi_{\lambda,\lambda}$ は $B_{\mathbb{C}}$ の正則な指標であるので, $\mathcal{L}_{\lambda,\lambda}$ は正則直線束となる．この正則直線束を $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{hol}} \equiv \mathcal{L}_{\lambda,\lambda}$ と書くこととする．

さて滑らかな直線束 $\mathcal{L}_{n,\lambda}$ の場合のように, $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{hol}}$ に対して正則な切断を考えよう．D を $\mathbb{C}$ の領域とし, G を D に作用する $G_{\mathbb{C}}$ の部分群とする．$\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{hol}} \equiv \mathcal{L}_{\lambda,\lambda}$ であるので, G は D 上の正則な切断全体のなす空間 $\mathcal{O}(D) \equiv \mathcal{O}(D, \mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{hol}})$ に multiplier representation $\pi_\lambda^{\mathrm{hol}} \equiv \pi_{\lambda,\lambda}$ で作用する．定義より, $\pi_\lambda^{\mathrm{hol}}$ は $h^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, $F \in \mathcal{O}(D)$ に対し

$$\bigl(\pi_\lambda^{\mathrm{hol}}(h)F\bigr)(z) = (cz+d)^{-\lambda} F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

によって与えられる．

3.3 The Rankin–Cohen bracket $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$

それでは今から双微分作用素 $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$ について簡単に触れる．D を $\mathbb{C}$ の領域とし, $\mathcal{O}$ を D 上の正則関数全体のなす空間とする．このとき, $a \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ に対して, 双微分作用素 $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2} : \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D)$ を

$$\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}(f_1 \otimes f_2)(z) := \sum_{\ell=0}^{a} (-1)^\ell \binom{\lambda_1 + a - 1}{\ell} \binom{\lambda_2 + a - 1}{a - \ell} \frac{\partial^{a-\ell} f_1}{\partial z^{a-\ell}}(z) \frac{\partial^\ell f_2}{\partial z^\ell}(z) \tag{3.2}$$

と定義する．この双微分作用素 $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$ を *Rankin–Cohen bracket* と呼ぶ. 定義より,

$$\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}(f_1 \otimes f_2)(z) = (-1)^a \mathcal{RC}^a_{\lambda_2,\lambda_1}(f_2 \otimes f_1)(z) \tag{3.3}$$

であることが直ちにしたがう．また重要な性質として, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ のとき, $h \in G$ に対して

$$\pi^{\mathrm{hol}}_{\lambda_1+\lambda_2+2a}(h) \circ \mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2} = \mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2} \circ \bigl(\pi^{\mathrm{hol}}_{\lambda_1}(h) \otimes \pi^{\mathrm{hol}}_{\lambda_2}(h)\bigr) \tag{3.4}$$

が成り立つ. (ここで G は D に作用する $G_{\mathbb{C}}$ の部分群.) 特に $\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{hol}}$ の正則な切断全体のなす空間 $\mathcal{O}(\mathcal{L}_\lambda^{\mathrm{hol}})$ に対して

$$\mathcal{RC}^a_{\lambda+1,\lambda-1} : \mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda+1}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda-1}) \to \mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{2\lambda+2a}),$$

$$\mathcal{RC}^a_{\lambda-1,\lambda+1} : \mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda-1}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda+1}) \to \mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{2\lambda+2a})$$

が成り立つ.

4 Holomorphic trick

この節の目的は Rankin–Cohen bracket $\mathcal{RC}^{a}_{\lambda_1,\lambda_2}$ を用い問題 A を考えることである. 表記を簡単にするため, これ以後 $X = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ と書くことにする.

初めに準備として X 上の直線束についてまとめよう. まずこれまで $\mathcal{L}^{\mathrm{conf}}_{\lambda}$ $\mathcal{L}_{n,\lambda}$, そして $\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda}$ の 3 つの直線束に触れて来た. また X 上の自然なベクトル束として余接ベクトル束 (T^*X) がある. そこで $(T^*X)\otimes\mathbb{C} = (T^*X)^{1,0}\oplus(T^*X)^{0,1}$ を $(T^*X)\otimes\mathbb{C}$ の正則余接ベクトル束 $(T^*X)^{1,0}$ と反正則余接ベクトル束 $(T^*X)^{0,1}$ の Whitney 和とする. このとき直線束 $\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda}$, $\mathcal{L}^{\mathrm{conf}}_{\lambda}$, $(T^*X)^{1,0}$, $(T^*X)^{0,1}$ は次のように $\mathcal{L}_{n,\lambda}$ を用いて表される.

補題 4.1. [4, Lemma 3.1] $X = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上の $G_{\mathbb{C}}$-同変直線束として次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda} &\simeq \mathcal{L}_{\lambda,\lambda} \quad\ \lambda\in\mathbb{Z},\\
\mathcal{L}^{\mathrm{conf}}_{\lambda} &\simeq \mathcal{L}_{0,2\lambda} \quad \lambda\in\mathbb{C},\\
(T^*X)^{1,0} &\simeq \mathcal{L}_{2,2},\\
(T^*X)^{0,1} &\simeq \mathcal{L}_{-2,2}.
\end{aligned}$$

4.1 Totally real な部分多様体への制限

さてこれから $X = \mathbb{P}^1\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ の $\mathbb{P}^1\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ への totally real な埋め込み

$$\iota : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1\mathbb{C}, \quad z\mapsto (z,\bar{z}) \tag{4.1}$$

を考える. $G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ であり, また Borel 部分群 $B_{\mathbb{C}}$ は複素共役 $g\mapsto\bar{g}$ で安定であるので, 埋め込み ι は群準同型

$$G_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}\times G_{\mathbb{C}}, \quad g\mapsto (g,\bar{g})$$

を介して, $G_{\mathbb{C}}$ の作用を保つ. このとき次の補題 4.2は補題 4.1より直ちにしたがう.

補題 4.2. [4, Lemma 4.1] $G_{\mathbb{C}}$-同変な直線束として次が成り立つ.

$$\iota^*\left(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda_1}\boxtimes\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda_2}\right) \simeq \mathcal{L}_{\lambda_1-\lambda_2,\lambda_1+\lambda_2}.$$

特に $\lambda\in\mathbb{Z}$ に対して,

$$\iota^*(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda+1}\boxtimes\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda-1}) \simeq \mathcal{L}^{\mathrm{conf}}_{\lambda-1}\otimes(T^*X)^{1,0}, \tag{4.2}$$

$$\iota^*(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda-1}\boxtimes\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda+1}) \simeq \mathcal{L}^{\mathrm{conf}}_{\lambda-1}\otimes(T^*X)^{0,1}. \tag{4.3}$$

(2.2) の様に, $(i,j) = (1,0),(0,1)$ に対して,

$$\mathcal{E}^{(i,j)}_{\lambda}(X) := C^{\infty}(X,\ \mathcal{L}^{\mathrm{conf}}_{\lambda}\otimes(T^*X)^{(i,j)})$$

と書くこととする. また 2.1節より $G_{\mathbb{C}}$ の $\mathcal{E}^{i}_{\lambda}(X)$ 上の正則表現を $\varpi_{\lambda,i}$ と表す.

命題 4.3. [4, Proposition 4.2] 同型 (4.2), (4.3) は次の同変層間の $G_{\mathbb{C}}$-同変な単準同型を誘導する:

$$\begin{aligned}
(\iota^*)^{1,0} &: \mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda+1})\otimes\mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda-1}) \to \mathcal{E}^{1,0}_{\lambda-1}(X), \quad f_1(z_1)\otimes f_2(z_2)\mapsto f_1(z)f_2(\bar{z})dz,\\
(\iota^*)^{0,1} &: \mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda-1})\otimes\mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda+1}) \to \mathcal{E}^{0,1}_{\lambda-1}(X), \quad f_1(z_1)\otimes f_2(z_2)\mapsto f_1(z)f_2(\bar{z})d\bar{z}.
\end{aligned}$$

つまり $(\iota^*)^{1,0}$, $(\iota^*)^{0,1}$ は $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ の各開部分集合 D で単準同型であり, 適切な g に対して

$$\begin{aligned}
(\iota^*)^{1,0}\circ\left(\pi^{\mathrm{hol}}_{\lambda+1}(g)\otimes\pi^{\mathrm{hol}}_{\lambda-1}(\bar{g})\right) &= \varpi_{\lambda-1,1}(g)\circ(\iota^*)^{1,0}\\
(\iota^*)^{0,1}\circ\left(\pi^{\mathrm{hol}}_{\lambda-1}(g)\otimes\pi^{\mathrm{hol}}_{\lambda+1}(\bar{g})\right) &= \varpi_{\lambda-1,1}(g)\circ(\iota^*)^{0,1}
\end{aligned}$$

を満たす.

さてここで我々の目的を思い出そう．我々の目的は関数等式 $(\mathcal{M}_{\lambda,\nu})$ を満たす微分作用素 $\mathcal{D}: C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R})$ を見つけることである．そこで, ある定数 $\mu \in \mathbb{C}$ が存在して, $a \in \mathbb{N}$ および $\nu = \lambda + a$ に対して, 次の 2 つ図式が可換になるような微分作用素 $\mathcal{D}$ を考える．

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda+1}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda-1}) & \xhookrightarrow{(\iota^*)^{1,0}} & \mathcal{E}^{1,0}_{\lambda-1}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{E}^1_{\lambda-1}(\mathbb{R}^2) & \simeq & C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \\
{\scriptstyle \mu\mathcal{RC}^a_{\lambda+1,\lambda-1}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}} \\
\mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{2\lambda+2a}) & \xhookrightarrow{\iota^*} & \mathcal{E}_\nu(\mathbb{R}) & \simeq & C^\infty(\mathbb{R}),
\end{array}
\tag{4.4}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda-1}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{\lambda+1}) & \xhookrightarrow{(\iota^*)^{0,1}} & \mathcal{E}^{0,1}_{\lambda-1}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{E}^1_{\lambda-1}(\mathbb{R}^2) & \simeq & C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \\
{\scriptstyle (-1)^a\mu\mathcal{RC}^a_{\lambda-1,\lambda+1}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}} \\
\mathcal{O}(\mathcal{L}^{\mathrm{hol}}_{2\lambda+2a}) & \xhookrightarrow{\iota^*} & \mathcal{E}_\nu(\mathbb{R}) & \simeq & C^\infty(\mathbb{R})
\end{array}
\tag{4.5}
$$

ここで $\mathcal{E}^1_{\lambda-1}(\mathbb{R}^2)$ は以下のように $C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2)$ と同一視している：

$$\mathcal{E}^1_{\lambda-1}(\mathbb{R}^2) \simeq C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad f dx + g dy \mapsto (f, g).$$

図式 (4.4), (4.5) を可換にする微分作用素に対して次が成り立つ．

命題 4.4. [4, Section 4.3] *ある定数 $\mu \in \mathbb{C}$ が存在して, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$ に対して, (4.4), (4.5) が可換であれば, 微分作用素 $\mathcal{D}$ は全ての $\lambda \in \mathbb{C}$ と $\nu = \lambda + a$ に対し $(\mathcal{M}_{\lambda,\nu})$ を満たす．*

4.2 微分作用素 $\mathcal{D}^{(\lambda,a)}_1, \mathcal{D}^{(\lambda,a)}_2$

命題 4.4より, 図式 (4.4), (4.5) を可換にする微分作用素 $\mathcal{D}$ を考えれば良いことが分かった．これからそのような微分作用素 $\mathcal{D}$ を Rankin–Cohen bracket $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$ より構成する．

まず $\mathrm{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}(x,y)$ を

$$\mathrm{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}(x,y) := \sum_{\ell=0}^{a} (-1)^\ell \binom{\lambda_1 + a - 1}{\ell} \binom{\lambda_2 + a - 1}{a - \ell} x^{a-\ell} y^\ell \tag{4.6}$$

と定義された 2 つの変数 x, y の多項式とすると, Rankin–Cohen bracket $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$ は

$$\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2} = \mathrm{Rest}_{z_1=z_2=z} \circ \mathrm{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right)$$

と表せる．そこで $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{N}$ に対し, $D^{(\lambda,a)}_1$, $D^{(\lambda,a)}_2$ を

$$D^{(\lambda,a)}_1(x,y) + \sqrt{-1} D^{(\lambda,a)}_2(x,y) = 2^{-a} \mathrm{RC}^a_{\lambda+1,\lambda-1}(x - \sqrt{-1}y, x + \sqrt{-1}y) \tag{4.7}$$

を満たす実係数を持つ斉次多項式とし, また微分作用素 $\mathcal{D}^{(\lambda,a)}_1, \mathcal{D}^{(\lambda,a)}_2$ を

$$\mathcal{D}^{(\lambda,a)}_j := D^{(\lambda,a)}_j\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad (j = 1, 2)$$

とおく．このとき

$$\mathcal{D}^{(\lambda,a)}_1 + \sqrt{-1} \mathcal{D}^{(\lambda,a)}_2 = \mathrm{RC}^a_{\lambda+1,\lambda-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \tag{4.8}$$

が成り立つ．最後に $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}$ を

$$\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a} := \mathrm{Rest}_{y=0} \circ \left(\mathcal{D}^{(\lambda,a)}_1, \mathcal{D}^{(\lambda,a)}_2\right)$$

と定める．次の補題より, $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}$ は $\mu = 1$ に対し, 実際 (4.4) and (4.5) を可換にする．

命題 4.5. [4, Lemma 4.3] $\lambda \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$ とする．正則関数 f_1, f_2 に対し，

$$\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}\left((\iota^*)^{1,0}(f_1 \otimes f_2)\right) = \iota^* \mathcal{RC}^a_{\lambda+1,\lambda-1}(f_1 \otimes f_2),$$
$$\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}\left((\iota^*)^{0,1}(f_1 \otimes f_2)\right) = \iota^* (-1)^a \mathcal{RC}^a_{\lambda-1,\lambda+1}(f_1 \otimes f_2)$$

が成り立つ．特に

$$\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a} \in \mathrm{Diff}(\lambda, \lambda + a).$$

次に微分作用素 $\mathcal{D}^\vee_{\lambda,\lambda+a}$ を以下に定める:

$$\mathcal{D}^\vee_{\lambda,\lambda+a} \equiv (\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a})^\vee := \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (-\mathcal{D}^{(\lambda,a)}_2, \mathcal{D}^{(\lambda,a)}_1).$$

[4, Proposition 1.2] および $(\mathcal{D}^\vee_{\lambda,\lambda+a})^\vee = \mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}$ より，

$$\mathcal{D}^\vee_{\lambda,\lambda+a} \in \mathrm{Diff}(\lambda, \lambda + a) \iff \mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a} \in \mathrm{Diff}(\lambda, \lambda + a)$$

が従う．ゆえに補題 4.5から, 次が成り立つ.

命題 4.6. $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\mathcal{D}^\vee_{\lambda,\lambda+a} \in \mathrm{Diff}(\lambda, \lambda + a).$$

実際, $\mu = \sqrt{-1}$ に対して, $\mathcal{D}^\vee_{\lambda,\lambda+a}$ は (4.4), (4.5) を可換にする ([4, Remark 4.4] を参照).

5 Jacobi 多項式と微分作用素 $\mathcal{D}^{(\lambda,a)}_i$

第 4 節で, $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a} = \mathrm{Rest}_{y=0} \circ \left(\mathcal{D}^{(\lambda,a)}_1, \mathcal{D}^{(\lambda,a)}_2\right)$, $\mathcal{D}^\vee_{\lambda,\lambda+a} = \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (-\mathcal{D}^{(\lambda,a)}_2, \mathcal{D}^{(\lambda,a)}_1)$ は $\nu = \lambda + a$ に対し, $(\mathcal{M}_{\lambda,\nu})$ を満たすことが分かった．そこでこの節では微分作用素 $\mathcal{D}^{(\lambda,a)}_1$, $\mathcal{D}^{(\lambda,a)}_2$ を具体的に示す．そのために Jacobi 多項式と Gegenbauer 多項式を用いる．よってまずそれらの多項式について簡単に触れておこう.

5.1 Jacobi 多項式 $P^{\alpha,\beta}_\ell(t)$

Jacobi 多項式 $P^{\alpha,\beta}_\ell(t)$ は, 次に示される複素パラメータ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を持つ ℓ 次の 1 変数 t に関する多項式である:

$$\begin{aligned} P^{\alpha,\beta}_\ell(t) &= \frac{\Gamma(\alpha+\ell+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\ell+1)}\ {}_2F_1\big(-\ell, 1+\alpha+\beta+\ell; \alpha+1; \frac{1-t}{2}\big) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\ell+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\ell+1)} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\ell+k+1)}{\Gamma(\ell+1)\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{t-1}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

ここで ${}_2F_1$ はガウス超幾何関数を示す．さて次にこの Jacobi 多項式 $P^{\alpha,\beta}_\ell(t)$ を以下のように x, y に関する ℓ 次の 2 変数斉次多項式 $P^{\alpha,\beta}_\ell(x, y)$ に膨らませる：

$$P^{\alpha,\beta}_\ell(x, y) := y^\ell P^{\alpha,\beta}_\ell\left(2\frac{x}{y} + 1\right).$$

例えば, $P^{\alpha,\beta}_0(x, y) = 1$, $P^{\alpha,\beta}_1(x, y) = (2 + \alpha + \beta)x + (\alpha + 1)y$. この膨らませた Jacobi 多項式 (inflated Jacobi polynomial) $P^{\alpha,\beta}_\ell(x, y)$ は次の等式を満たす.

補題 5.1. [4, Section 3] $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\mathrm{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}(x, y) = (-1)^a P^{\lambda_1-1,-\lambda_1-\lambda_2-2a+1}_a(x, y).$$

5.2 Gegenbauer 多項式 $C_\ell^\alpha(t)$

Gegenbauer 多項式 (又は超球多項式) $C_\ell^\alpha(t)$ は, 次に示される複素パラメータ $\alpha \in \mathbb{C}$ を持つ ℓ 次の 1 変数 t に関する多項式である：

$$
\begin{aligned}
C_\ell^\alpha(t) &= \frac{\Gamma(\ell+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\ell+1)}\ {}_2F_1\big(-\ell, \ell+2\alpha; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{1-t}{2}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{\ell}{2}]}(-1)^k \frac{\Gamma(\ell-k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)\Gamma(\ell-2k+1)}(2t)^{\ell-2k}.
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

ここで $[\frac{\ell}{2}]$ は $\frac{\ell}{2}$ を超えない最大の整数を示す. さて次に Jacobi 多項式のときのように Gegenbauer 多項式 $C_\ell^\alpha(t)$ を 2 変数の多項式 $C_\ell^\alpha(x,y)$ に膨らませる：

$$
C_\ell^\alpha(x,y) := x^{\frac{\ell}{2}} C_\ell^\alpha\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right).
$$

例えば, $C_0^\alpha(x,y) = 1$, $C_1^\alpha(x,y) = 2\alpha y$, $C_2^\alpha(x,y) = 2\alpha(\alpha+1)y^2 - \alpha x$. ここで $C_\ell^\alpha(x,y)$ ではなく, $C_\ell^\alpha(x^2,y)$ が x と y の ℓ 次斉次多項式になることに注意して頂きたい.

5.3 微分作用素 $\mathcal{D}_i^{(\lambda,a)}$ の具体的表示

それではこれから微分作用素 $\mathcal{D}_1^{(\lambda,a)}$ と $\mathcal{D}_2^{(\lambda,a)}$ を具体的に示す. $a \in \mathbb{N}_+$ に対して, λ に関する 3 つの有理型関数 $A_a(\lambda)$, $B_a(\lambda)$, $U_a(\lambda)$ を以下に定める：

$$
\begin{aligned}
A_a(\lambda) &:= \frac{2\lambda^2 + 2(a-1)\lambda + a(a-1)}{a(2\lambda+a-1)}, \\
B_a(\lambda) &:= \frac{(\lambda-1)(2\lambda+1)}{a(2\lambda+a-1)}, \\
U_a(\lambda) &:= \frac{2\left(\lambda+[\frac{a}{2}]\right)_{[\frac{a-1}{2}]}}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_{[\frac{a-1}{2}]}}.
\end{aligned}
$$

ここで $(\mu)_k := \mu(\mu+1)\cdots(\mu+k-1) = \frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}$ は Pochhammer 記号を示す. 以下の命題 5.2が $\mathcal{D}_1^{(\lambda,a)}$, $\mathcal{D}_2^{(\lambda,a)}$ を具体的に示す上で鍵となる.

命題 5.2. [4, Proposition 4.5] $a \in \mathbb{N}_+$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&(1-z)^a P_a^{\lambda,-2\lambda-2a+1}\left(\frac{3+z}{1-z}\right) \\
&= (-1)^{a-1} U_a(\lambda)\left((1-A_a(\lambda)z)C_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}}(z) + B_a(\lambda)(1-z^2)C_{a-2}^{\lambda+\frac{3}{2}}(z)\right)
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

が成り立つ. また同値な等式として

$$
\begin{aligned}
&P_a^{\lambda,-2\lambda-2a+1}(x-\sqrt{-1}y, x+\sqrt{-1}y) \\
&= (\sqrt{-1})^{a-1} U_a(\lambda)\left(xC_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}}(-x^2,y) + \sqrt{-1}\left(A_a(\lambda)yC_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}}(-x^2,y) + B_a(\lambda)(x^2+y^2)C_{a-2}^{\lambda+\frac{3}{2}}(-x^2,y)\right)\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

Remark 5.3. 等式 (5.2) は既に知られていると思われるが, しかし, どの文献を当たっても見つけられなかった. どなたか心当たりがある方は, ぜひご一報いただきたい.

さて $C_\ell^\alpha\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ を $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ をそれぞれ $C_\ell^\alpha(x,y)$ の x, y に形式的に代入して得られる $\mathbb{R}^2$ 上の ℓ 階の斉次微分作用素とし, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ に対して, $\mathcal{C}_\ell^\alpha$ を以下に定める：

$$\mathcal{C}_\ell^\alpha := \begin{cases} C_\ell^\alpha\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}\right) & \ell \geq 0 \\ 0 & \ell < 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

例えば, $\mathcal{C}_0^\alpha = \mathrm{id}$, $\mathcal{C}_1^\alpha = 2\alpha\frac{\partial}{\partial y}$, $\mathcal{C}_2^\alpha = \alpha\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(\alpha+1)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$. この微分作用素 $\mathcal{C}_\ell^\alpha$ を用い, $\mathcal{D}_1^{(\lambda,a)}$, $\mathcal{D}_2^{(\lambda,a)}$ は以下のように表される.

定理 5.4. [4, Section 4.3] $\lambda \in \mathbb{C}$ *とする. このとき各* $a \in \mathbb{N}$ *に対して, unique up to scalar multiple に* $\mathcal{D}_1^{(\lambda,a)}$, $\mathcal{D}_2^{(\lambda,a)}$ *は次のように与えられる.*

$a = 0$ *の場合：*

$$\mathcal{D}_1^{(\lambda,0)} = \mathrm{id}, \qquad \mathcal{D}_2^{(\lambda,0)} = 0. \tag{5.4}$$

$a \in \mathbb{N}_+$ *の場合：*

$$\mathcal{D}_1^{(\lambda,a)} = a(2\lambda + a - 1)\frac{\partial}{\partial x} \circ \mathcal{C}_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}}, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2^{(\lambda,a)} = \big(2\lambda^2 + 2(a-1)\lambda + a(a-1)\big)\frac{\partial}{\partial y} \circ \mathcal{C}_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}} \\ + (\lambda-1)(2\lambda+1)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \circ \mathcal{C}_{a-2}^{\lambda+\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

系 5.5. $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{N}$ *に対して,* $\mathrm{Diff}(\lambda, \lambda + a) \neq \{0\}$.

6 Verma 加群の分岐則

定理 4.6によってすべての $\lambda \in \mathbb{C}$ および $a \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}$, $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}^\vee \in \mathrm{Diff}(\lambda, \lambda+a)$, すなわち $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}$, $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}^\vee$ は, $\nu = \lambda + a$ に対し, $(\mathcal{M}_{\lambda,\nu})$ を満たすことが分かった. この節では $2\lambda \notin -\mathbb{N}$ の仮定のもと, 逆にその様な微分作用素は全て $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}$ と $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}^\vee$ の線形結合で表せることを示す.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ とおき, $\mathfrak{b}$ を下三角行列全体からなる $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数とする. $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $\mathfrak{b}$ の指標を

$$\mathfrak{b} \to \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} -x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \mapsto \lambda x$$

で定め, $\mathbb{C}_\lambda$ と書くこととする. $\lambda \in \mathbb{Z}$ であれば, $\mathbb{C}_\lambda$ は3.2節で定めた Borel 部分群 $B_{\mathbb{C}}$ の正則指標 $\chi_{\lambda,\lambda}$ の微分である. ここで Verma 加群と呼ばれる $\mathfrak{g}$-加群

$$M(\lambda) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$$

を考える. ベクトル $1 \otimes 1_\lambda \in M(\lambda)$ は最高ウェイト $\lambda \in \mathbb{C}$ の最高ウェイトベクトルであり, $\mathfrak{g}$-加群として $M(\lambda)$ を生成する. また $M(\lambda)$ が既約であることの必要十分条件は $\lambda \notin \mathbb{N}$ である. 次の命題がこの節の主結果を求める上で本質的である.

命題 6.1. $\lambda_1 + \lambda_2 \notin \mathbb{N}$ *であれば, テンソル積* $M(\lambda_1) \otimes M(\lambda_2)$ *は次のように Verma 加群の直和に分解される：*

$$M(\lambda_1) \otimes M(\lambda_2) \simeq \bigoplus_{a=0}^{\infty} M(\lambda_1 + \lambda_2 - 2a).$$

この命題の証明としては, 例えば, [2] を参照されたい. 実際, [2] では対称対に対する制限の一般の場合で, (放物型) Verma 加群の (抽象的な) 分岐則が議論されている.

さて differential symmetry breaking operator (部分多様体への共変微分作用素) と Verma 加群の (離散分解可能な) 分岐則の間の双対定理 ([5], [6, Theorem 2.7]) により, 次の 1 対 1 対応が成り立つことに注意する：

$$\begin{aligned} &\{(\mathcal{M}_{\lambda,\nu}) \text{ を満たす微分作用素 } \mathcal{D}\ \} \\ &\leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(M(-2\nu), M(-\lambda-1)\otimes M(-\lambda+1)\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \oplus \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(M(-2\nu), M(-\lambda+1)\otimes M(-\lambda-1)\right). \end{aligned} \tag{6.1}$$

命題 6.1と (6.1) より, 次の命題が従う.

命題 6.2. $\lambda \in \mathbb{C}$ とし, $2\lambda \notin -\mathbb{N}$ とする. このとき $\mathrm{Diff}(\lambda,\nu) \neq \{0\}$ であるための必要十分条件は, $\nu-\lambda \in \mathbb{N}$. さらに, すべての $a \in \mathbb{N}$ に対して, $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Diff}(\lambda, \lambda+a) = 2$.

系 6.3. $\lambda \in \mathbb{C}$ とし, $2\lambda \notin -\mathbb{N}$ であれば,

$$\mathrm{Diff}(\lambda,\nu) = \begin{cases} \mathbb{C}\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a} \oplus \mathbb{C}\mathcal{D}^{\vee}_{\lambda,\lambda+a} & \nu-\lambda \in \mathbb{N}, \\ \{0\} & \nu-\lambda \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

参考文献

[1] H. Cohen, *Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters*, Math. Ann. **217**, (1975), 271–285.

[2] T. Kobayashi, *Restrictions of generalized Verma modules to symmetric pairs*, Transform. Group, **17**, (2012) 523–546.

[3] T. Kobayashi, B. Ørsted, *Analysis on the minimal representation of* $\mathrm{O}(p,q)$. Part I, Adv. Math., **180**, (2003) 486–512; Part II, *ibid*, 513–550; Part III, *ibid*, 551–595.

[4] T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner, *Vector-valued covariant differential operators for the Möbius transformation*, preprint, 20pp. arXiv:1406.0674, (to appear in Lie Theory and Its Applications in Physics: Xth International Workshop, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics)

[5] T. Kobayashi, B. Ørsted, P. Somberg, V. Souček, *Branching laws for Verma modules and applications in parabolic geometry*, Part I, preprint, 37 pages, arXiv:1305.6040; Part II, in preperation.

[6] T. Kobayashi, M. Pevzner, *Rankin–Cohen operators for symmetric pairs*, preprint, 53pp. arXiv:1301.2111.

[7] T. Kobayashi, B. Speh, *Symmetry breaking for representations of rank one orthogonal groups*, 131pp. to appear in Memoirs of Amer. Math. Soc. arXiv:1310.3213.

[8] R. A. Rankin, *The construction of automorphic forms from the derivatives of a given form*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), pp. 103–116.