

無限次元の対称性の解析

小林 俊行

フンボルト賞をいただいた折に執筆した[数理ニュース\(2009年3月号\)](#)の記事との重複をさけるため、今回は別のトピックとして**極小表現の解析**を取り上げてみます。「極小表現の解析」はちょうど 20 年前の 1991 年に研究を開始し、(私が勝手に)命名したテーマですが、最初の 10 年間は、あちこちで講演をするだけで本格的な論文も書かずに、ゆっくりと想を温めていました。「極小表現の解析」のどこに私や私の研究仲間が惹きつけられているのか、できるだけやわらかな言葉で紹介してみようと思います。

■根源的な表現を求めて■

古代ギリシャに現れた思想「最小単位のものから万物を理解する」は「そもそも最小単位とは何か?」という問題を私たちにつきつけます。物質の最小単位として、分子→原子→素粒子…と深化するように、「最小が何なのか」は我々の知と観点に依存します。

数学における“**対称性の最小単位**”は、線型な作用の分解という観点からは既約表現になります。ところで、大抵の既約表現は、より簡単な既約表現から構成できます(とはいえ、構成は簡単とは限りません)。そこで構成という観点を究極まで取り込んでみると、“源流”に相当する表現はごく少数しかないとわかります。単純リー群の極小表現はこの意味での“根源的な表現”であり、保型形式に現れるヴェイユ表現や水素原子の対称性を表すユニタリ表現はその典型例となります。

■極小表現＝対称性がとびきり高い!■

“**極小表現**”は無次元表現として最も小さいということを定式化した概念です。非コンパクト単純リー群には連続濃度の既約無限次元表現が存在しますが、その中で、極小表現はせいぜい 1 つか 2 つくらいしかありません。表現論における極小表現とは、代数構造(群やリー環)を固定して考えた時の視線で名付けられた用語なのです。

発想を逆転させて、作用される空間の側からの視線で見ると、「表現が小さい」ということは、「対称性がとびきり高い」こととなります。ふと、このことに気づき、

代数的表現論 ⇒ 極小表現をモチーフとした大域解析と幾何学を指針とすると、散発的に発見していたことがつながり始めました。対称性がとびきり高い、というのは関数空間の話なのですが、幾何で言えば、いわば「球よりも丸い」という(仮想的な)空間が背後にある、そんな大域解析が「極小表現の解析」なのです。

■同一の対称性があちこちに出現する■

異分野の数学に出現したとびきり高い対称性が、同一の極小表現を与えることがあります。こういう偶然が起りやすいのも極小表現の特徴です。しかし、数学における偶然は、何かの必然である、という可能性もあります。極小表現の大域解析からこれまでに生まれた事柄にも、さまざまな分野の数学が結びついています。やや意外なものでは

- ・擬リーマン多様体の共形幾何
- ・ウルトラ双曲型方程式の解の保存量
- ・フーリエ変換の変形理論(Dunkl 変換や Hermite 半群などを特殊値として含む変換)
- ・特殊多項式・特殊関数論(ある 4 階の常微分方程式によって定まる)

などが挙げられます。最近はこれらのテーマで数百ページを越える論文を書き続けていますが、自然な形で新たに湧き上がるものに追いつかない感があります。