不定値計量を持つ等質空間と不連続群

東大 理学部　　小林　俊行　(Toshiyuki Kobayashi)

1989 年 6 月 28 日

1 簡約型等質空間とθ-stable な等質空間

1.1 定義

リー群 G が線型実簡約リー群 (real reductive linear group) であるとは、G が連結な複素簡約リー群の実形であるときをいう。G の連結性は仮定しない。これは高々連結成分が有限なリー群 G が $GL(n,\mathbf{R})$ の転置に関して閉じているような部分群として実現される事と同値である。

G のリー環を $\mathfrak{g}$で表す。G の Cartan involution θ を固定する。定義から、G の各連結成分は θ の固定部分群 Kと交わる。θ の リー環 $\mathfrak{g}$ における $+1, -1$ 固有分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は Cartan 分解と呼ばれる。$\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ あるいはその G による共役を極大分裂可換部分空間 (maximally split abelian subspace) とよぶ。ルート系 $\Sigma(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$ に対応したワイル群を $W(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ で表す。$\mathbf{R}\text{-rank}G := \dim\mathfrak{a}$, $d(G) := \dim\mathfrak{p}$ とおく。G は線型であるので、G の中心における Cartan involution の不定性は本質的になく、$\mathbf{R}\text{-rank}G$ や $d(G)$ は well-defined であることに注意しよう。

1.2 例

1. G がコンパクトならば、$\mathbf{R}\text{-rank}G = d(G) = 0$。

2. $G = SO(p,q)$ のとき、$\mathbf{R}\text{-rank}G = \min(p,q)$, $d(G) = pq$。

1.3 G と H の条件

G の連結成分が高々有限個であるような閉部分群 H に対して次の条件を考える：

1. H のリー環 $\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}$ への随伴表現が完全可約である

2. $\mathfrak{h}$ の複素化 $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbf{C}$ に対応する連結リー群は $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ において閉部分群である

1.4 定義

G, H が、条件 1.3.1 を満たすとき H はG において簡約 (reductive in G) であるといい、G/Hを簡約型等質空間 (homogeneous space of reductive type) と呼ぶ。G, H が、条件 1.3.1 及び 1.3.2 を満たすとき (G, H) は θ-stable pair であるといい、G/H を θ-stable な等質空間と呼ぶ。

1.5 注意

条件 1.3.1 は、H 及び G が $GL(n, \mathbf{R})$ の転置に関して閉じているような部分群として同時に実現される事に対応している。これはまた、「Cartan involution θ を取り直して H が Cartan 分解 $H = (H \cap K)\exp(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ を持つようにできる」ということと同値であり、以後、条件 1.3.1 が満たされているときは、必ず Cartan involution θ を $\theta(H) = H$ なるようにとる。簡約型等質空間 G/H には $\mathfrak{g}$ の G 不変な２次形式から誘導される G 不変な擬リーマン計量が入る。

また、条件 1.3.2は、$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の代わりに、$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ をリー環とする任意の複素リー群に置き換えても同値である。

1.6 例

G を連結線型半単純リー群とする。

1. H を θ で閉じている $\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{t}$ の G における中心加群（あるいは正規加群）とすると、(G, H) は θ-stable pair である。特に $\mathfrak{t}$ が可換部分代数のときは、すぐ後で定義するコンパクト型 G_U/H_U は（一般化された）旗多様体となる。更に、$\mathfrak{t}$ が $\mathfrak{k}$ に含まれる可換部分代数のときは、G/H に G 不変な複素構造が入る。

2. H を G の有限位数の自己同型 σ の固定部分群の開部分群とすると、(G, H) は θ-stable pair。特に半単純対称空間は 1.4 の意味で θ-stable な等質空間である。

3. H がコンパクトなら、(G, H) は θ-stable pair。

4. H が G において簡約な極大階数部分群なら、(G, H) は θ-stable pair。

5. H が G の半単純連結部分群なら、(G, H) は θ-stable pair。

6. $G = SL(3, \mathbf{R})$ には、G において簡約であるが、(G, H) が θ-stable pair でないような $\mathbf{R}$ と同型な閉部分群 H が存在する。

1.7 複素化とコンパクト型

(G,H) を θ-stable pair としよう。この時、$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} \supset \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$をリー環とするような連結リー群 $G_{\mathbf{C}}$とその閉部分群 $H_{\mathbf{C}}$で次の条件を満たすようなものが存在する。リー環の単射 $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ に対応した準同型 $\iota : G \to G_{\mathbf{C}}$があって

$$H_{\mathbf{C}} = \iota(H)\cdot(H_{\mathbf{C}})_0$$

がなりたつ。(例えば、G が半単純リー群のときは $G_{\mathbf{C}}$ を随伴群 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ にとり、$H_{\mathbf{C}}$ を上の式で定義すればよい。)

$\mathfrak{g}$ の Cartan involution θ は $\theta\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ を満たすようにとったとする。この時 ベクトル空間の直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\cap\mathfrak{k} + \mathfrak{h}\cap\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\cap\mathfrak{k} + \mathfrak{q}\cap\mathfrak{p},$$

をうる。$\mathfrak{g}_U = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ をリー 環とする $G_{\mathbf{C}}$ の連結リー部分群を G_U とかき、$H_U := H_{\mathbf{C}} \cap G_U$とおく。$H_{\mathbf{C}}$ の各連結成分は H_U と交点を持つ事に注意しよう。

H_Uと G_U はそれぞれ $H_{\mathbf{C}}$および $G_{\mathbf{C}}$のコンパクト実形であり、自然な写像

$$G/H \longrightarrow \iota(G)/H_{\mathbf{C}} \cap \iota(G) \hookrightarrow G_{\mathbf{C}}/H_{\mathbf{C}} \hookleftarrow G_U/H_U$$

がある。G_U/H_U、$G_{\mathbf{C}}/H_{\mathbf{C}}$ を与えられたθ-stable な等質空間 G/H のそれぞれ<u>コンパクト型</u> (associated Riemannian space of compact type)、<u>複素化</u>と呼ぶ。G/H が非コンパクトリーマン対称空間のとき G_U/H_U は G/H の対称空間の意味での dual と一致する。

ι は単射でなくてもよいが, 以後議論を簡単にするために単射であると仮定する。

2 Hirzebruch の比例性原理

この節では、東北大の小野薫氏との共同研究を紹介する。(G,H) は θ-stable pair と仮定する。G/H のコンパクト型 G_U/H_U、複素化 $G_{\mathbf{C}}/H_{\mathbf{C}}$ を固定する。

2.1 コホモロジー間の環準同型

G の部分群 Γ が、G/H に固有不連続 (properly discondinuous) かつ自由 (free) (次節参照) に作用しているとする。$\Gamma\backslash G/H$ は、(必ずしもコンパクトでない) 多様体となる。

さて、G_U はコンパクトだから、de Rham コホモロジー $H^*(G_U/H_U;\mathbf{C})$ の各代表元として G_U 不変な微分形式をとることができる。これは、$G_{\mathbf{C}}/H_{\mathbf{C}}$

上の正則形式に拡張され、$\Gamma\backslash G/H$ に制限することによって、環準同型

$$\Upsilon : H^*(G_U/H_U;\mathbf{C}) \to H^*(\Gamma\backslash G/H;\mathbf{C}).$$

が得られる。

2.2 命題

$\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトかつ H が連結ならば、Υ は単射である。

2.3 随伴ベクトル束

V を $\mathbf{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$\rho : H_{\mathbf{C}} \to GL(V,\mathbf{C})$ を $H_{\mathbf{C}}$ の表現とする。主束 $H \to \Gamma\backslash G \to \Gamma\backslash G/H$ に随伴したベクトル束 ${}^{\Gamma}E := \Gamma\backslash G \times_{\rho|_H} V$ が定義される。同様に $E_U := G_U \times_{\rho|_{H_U}} V$ とおく。

Vが、H 安定な $\mathbf{R}$ 構造 $V_{\mathbf{R}}$ をもつ、即ち $V \simeq V_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}$ 及び $\rho(H)V_{\mathbf{R}} \subset V_{\mathbf{R}}$ なる $V_{\mathbf{R}}$ が存在する場合には、${}^{\Gamma}E_{\mathbf{R}} := \Gamma\backslash G \times_{\rho} V_{\mathbf{R}}$ が定義される。同様に、Vが、H_U 安定な $\mathbf{R}$ 構造 V_U をもつときには、$E_{U\mathbf{R}} := G_U \times_{\rho_U} V_U$ を定義する。

2.4 定理

記号は上の通りとする。

1. 第 i 次 Chern 類 c_i に対して

$$\Upsilon(c_i(E_U)) = c_i({}^{\Gamma}E) \in H^{2i}(\Gamma\backslash G/H;\mathbf{R}).$$

2. Vが、H 安定な $\mathbf{R}$ 構造 $V_{\mathbf{R}}$ 及び H_U 安定な $\mathbf{R}$ 構造 V_U をもつとする。このとき第 i 次 Pontrjagin 類 p_i に対して

$$\Upsilon(p_i(E_{U\mathbf{R}})) = p_i({}^{\Gamma}E_{\mathbf{R}}) \in H^{4i}(\Gamma\backslash G/H;\mathbf{R}).$$

2.5 注意

1. Υ は環準同型であったから、定理 2.4は、例えば $c_i(E_U)$ の間にコホモロジー環の積と和で書かれた関係式があれば、$c_i({}^{\Gamma}E)$ の間にも同じ関係式があることを主張している。更に、命題 2.2の仮定のもとで、この逆も成立する。

2. Hirzebruch の原論文 [4] では G/H エルミート対称空間の時（即ち、例 1.4において、1,2,3,4 が満たされているとき）にコホモロジーの最高次 (Chern 数）に上の関係があることが示された。

3. コホモロジー環 $H^*(G_U/H_U;\mathbf{R})$ は（従って定理2.4も）、前節1.7の複素リー群 $G_{\mathbf{C}}$ の取り方によらない。

4. H がコンパクトの時には Borel の有名な定理によって $\Gamma\backslash G/H$ をコンパクト多様体にするような離散部分群 Γ が常に存在することが保証されている [1],[2]。一方、H がコンパクトでないときには G の離散部分群 Γ が必ずしも G/H に固有不連続に作用せず、$\Gamma\backslash G/H$ はハウスドルフ空間にさえならないことがある。Hがコンパクトでない時にどの程度大きな離散部分群が、G/H に固有不連続に作用できるかは G 及び H の条件に著しく依存している。これが次節以降の話題である。

5. 定理 2.4 は $\Gamma\backslash G/H$ に位相的な一定の制約を与えている。この観点から、逆に G/H に一様格子が存在するための1つの必要条件が応用として系 5.6 で与えられる。

2.6 応用例

定曲率を持つリーマン多様体の 有理係数 Pontrjagin 類はすべて消える。

2.7 例

$X(p,q) := U(p+1,q)/U(1)\times U(p,q)$ $(p+q=n)$ とおく。$X(n,0)$ は複素射影空間 CP^n であり $X(0,n)$ は 非コンパクトなエルミート対称空間である。$U(p+1,q)$ の部分群 Γ が、$X(p,q)$ に固有不連続かつ自由に作用しているとする。

$$c_j(\Gamma\backslash X(p,q)) = \left(\prod_{l=0}^{j-1}\frac{n+1-l}{n+1}\right)c_1(\Gamma\backslash X(p,q))^j \quad (1\le j\le n).$$

さらに、Γ が一様格子なら、 $c_j(\Gamma\backslash X(p,q))\neq 0$ が任意の j $(1\le j\le n)$ に対して成り立つ。例えば、$(p,q)=(1,2r)$ の形のときは一様格子が存在することが、定理 5.8 で示される。

3 固有な作用と固有不連続な作用

3.1 定義

位相群 L が、位相空間 X に作用しているとき、この作用が、

1. <u>固有</u> (proper) であるとは、X の任意のコンパクト集合 S に対して $\{g\in L; g\cdot S\cap S\neq\emptyset\}$ がコンパクトのとき

2. 固有不連続 (properly discontinuous) であるとは、作用が固有かつ L が離散群のとき

3. 自由 (free) であるとは、X の任意の点の固定部分群が単位元のみであるときをいう。

3.2 固有な作用と商空間

固有な作用は、一般に不規則な振舞いをする非コンパクトリー群の作用がコンパクトリー群の作用のように良い性質を持つための条件として Palais [8] が組織的な研究をした。固有不連続な作用については、次の事実が理解を助ける：X が局所コンパクトハウスドルフ空間である時、離散群 Γ の X への作用が固有不連続ならば、$\Gamma\backslash X$ もまた商位相で局所コンパクトハウスドルフ空間となる。X が多様体である時、離散群 Γ の X への作用が固有不連続であれば $\Gamma\backslash X$ は佐武 [9] の意味で V-多様体であり、さらに作用が自由でもあれば $\Gamma\backslash X$ は多様体となる。なお、作用が固有不連続な時にはその作用が自由であるかどうかはそれほど深刻な問題ではない。実際、多くの場合、適当な指数有限の部分群の作用に置き換えることによって自由な作用を得ることが出来る。

3.3 定義

G の離散部分群 Γ が、

1. G/H の一様格子 (uniform lattice) であるとは、$\Gamma\backslash G/H$ がコンパクト多様体である時

2. G/H の格子 (lattice) であるとは、$\Gamma\backslash G/H$ が体積有限な多様体である時

3. G/H の一様でない格子 (non-uniform lattice) であるとは、$\Gamma\backslash G/H$ が体積有限であるがコンパクトでない多様体である時をいう。

但し、定義 3.3.3 は、G/H が（例えば簡約型等質空間のときのように）G 不変な体積要素を持つときに意味がある。これらの用語は H がコンパクトの時は通常のものと一致していることに注意しよう。

3.4 観察

Γ が G の一様格子であり、G が局所コンパクトな空間 X に作用しているとする。次の事は、定義から直ちに確かめられる：

1. $\Gamma\backslash X$ がコンパクト $\Leftrightarrow$ $G\backslash X$ がコンパクト。

2. Γ の X への作用が固有不連続 $\Leftrightarrow$ G の X への作用が固有。

3.5 方針

上の観察に基づいて、我々は次の方針をとる：

> G/H に固有不連続に作用する離散部分群 Γ を求める代わりに、G/H に固有に作用するようなできるだけ大きい簡約部分リー群 L を探し、L の離散部分群を G/H に作用させる。

3.6 問題

この方法で全ての離散部分群の G/H への作用が捉えられるわけではないが、ある意味で最も極端な場合が扱われていると考えられる。なお、H がコンパクトなら L として G 自身が G/H に固有に作用することに注意しよう。上の方針に従って、我々は L, H が簡約線型リー群 G における簡約部分群である時

1. いつ L が G/H に固有に作用するか？
2. いつ両側剰余空間 $L\backslash G/H$ がコンパクトになるか？

を明確な形で知りたい。この解答は第 5 節で与えられる。

3.7 注意

離散群 Γ が局所コンパクト空間 X に効果的に作用しているとき、次の概念は固有不連続よりもやや弱い。

> 任意の $x \in X$ に対して $\gamma_n \cdot x \to x$ となるような Γ の繰り返しのない列 γ_n は存在しない。

Γ が G の離散部分群で簡約型等質空間 G/H に左から自然に作用している設定では次の事が成り立つ。

1. Γ が、岩沢分解の $A(= \exp(\mathfrak{a}))$ に含まれているときは、固有不連続と同値である。これは、定理 5.1 の帰結として示される。
2. 例えば、$G := SL(2,\mathbf{R})$, H を岩沢分解の A, Γ を岩沢分解の N に含まれる $\mathbf{Z}$ と同型な格子とする。このとき、Γ の G/H への作用は上の条件を満たしているが、固有不連続ではない。

4 Calabi Markus 現象

この節では G/H に固有不連続に作用する G の部分群が最も少ない時を扱う。

4.1 定義

H をリー群 G の閉部分群とする。G/H が性質ＣＭを持つとは、次の同値な条件が満たされる時をいう。

1. G/H に固有不連続に作用しうる G の離散部分群は有限群のみである。
2. G/H に自由かつ固有不連続に作用しうる G の離散部分群は有限群のみである。

4.2 簡単な結果

最初に定義からほぼ自明な結果を述べよう。H（及び L）をリー群 G の閉部分群とする。

1. G/H がコンパクトなら、G/Hは性質ＣＭをもつ。
2. G/H が非コンパクトのとき、H がコンパクトまたは G の正規部分群ならば、G/Hは性質ＣＭをもたない。
3. $G \supset H \supset L$ で、G/L が性質ＣＭをもてば、G/H も性質ＣＭをもつ。

4.3 定理（可解群の場合）

H を可解リー群 G の閉部分群とする。$\pi_1(G/H) < \infty$ なら、G/H は性質ＣＭをもたない。

4.4 注意

上の結果で、$\pi_1(G/H) = \infty$ を許すと、$G = \mathbf{R}$, $H = \mathbf{Z}$ の様に簡単な例で G/H が性質ＣＭをもつ場合がある。
さて、可解リー群のときは、性質ＣＭが起こりにくい事がわかったが、その対極にある簡約リー群のときはどうであろうか？　次に挙げるのは、簡約型等質空間に対する Calabi-Markus 現象の特徴づけである。

4.5 定理（簡約型等質空間の場合）

G/H を簡約型等質空間とする。この時次の条件は同値である。

1. G/Hは性質ＣＭをもつ。
2. $\mathbf{R}\text{-rank}G = \mathbf{R}\text{-rank}G.$

4.6 証明について

可解群の場合は G が単連結のとき示せばよい。中心正規部分群による商空間を考え、次元による帰納法を用いる。比較的 idea がはっきりしているので省略する。

簡約型等質空間のとき、実階数 ($\mathbf{R}$-rank) 条件の十分性は本質的に Wolf による。証明はすぐできるのでやってみよう。$\mathbf{R}\text{-rank}G = \mathbf{R}\text{-rank}H$ と仮定すると $\mathfrak{h}$ における極大可換部分空間 $\mathfrak{a}(H)$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間でもあるので、Cartan 分解 $G = K\exp\mathfrak{a}(H)K = KHK$、即ち $\{g \in G; g\cdot(K/H\cap K)\cap(K/H\cap K) \neq \emptyset\} = G$ が成り立つ。$K/H\cap K$ はコンパクトであるから、これは G/H が性質CMを持つことを意味する。

必要性は、次節のもっと一般的な定理 5.1 の系として得られる。

4.7 歴史的な覚書

非コンパクトな等質空間に対して、Calabi と Markus (1962) [3] は性質CMが成り立つことを $G/H = SO(n,1)/SO(n-1,1)$ の例で初めて見いだした。これにちなんで性質CMは、Calabi-Markus 現象と呼ばれている。

その後、いくつかの半単純対称空間で性質CMをもつものが求められ、Wolf [13] によって、半単純対称空間の場合に、実階数条件との関係が指適された。しかし、必要性の証明には固有不連続の定義の混乱による間違いがある (注意 3.7 参照)。

Kulkarni(1982) [7] は、(p,q) 型の不定値2次形式の詳しい研究に基づいて、ランク1の半単純対称空間である $G/H = SO(p+1,q)/SO(p,q)$ の場合に、性質CMと実階数条件（この場合は $p \geq q$）の同値性を示した。

5 簡約型リー群の固有な作用

方針 3.5 に基づいて、簡約型等質空間への簡約型部分リー群の作用に関する判定条件を述べよう。定義は 1.1 節を思い起こそう。

5.1 定理

G/H が簡約型等質空間で、L は G において簡約であるとするとき、次の3つの条件は同値である。

1. L は G/H に固有に作用する。

2. H は G/L に固有に作用する。

3. $W(\mathfrak{g},\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{a}(L)\cap\mathfrak{a}(H) = \{0\}$.

但し、$\mathfrak{a}(L)$, $\mathfrak{a}(H)$ はそれぞれ L, H の極大分裂可換部分空間を G の各元の共役によって G の極大分裂可換部分空間 $\mathfrak{a}$ に含まれるように移したもの。条件 5.1.3 はこれらの選び方に関する不定性に依存しない。

5.2 定理

定理 5.1 の同値な 3 条件が成り立っているとき、次の 2 条件は同値である。

1. $L\backslash G/H$ が商位相でコンパクト。
2. $\mathrm{d}(L)+\mathrm{d}(H)=\mathrm{d}(G)$.

定理 5.1 の応用として次の 2 つの系が得られる。

5.3 系

G の簡約部分群 L が簡約型等質空間 G/H に固有に作用するならば、

$$\mathbf{R}\text{−rank}L+\mathbf{R}\text{−rank}H \le \mathbf{R}\text{−rank}G,$$

$$\mathrm{d}(L)+\mathrm{d}(H)\le \mathrm{d}(G).$$

5.4 系

$r := \mathbf{R}\text{−rank}G - \mathbf{R}\text{−rank}H > 0$ の時、$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbf{Z}$ (r個の直和) に同型な G の半単純な元からなる離散部分群が G/H に自由かつ固有に作用する。

定理 5.2 の証明から次の 2 つの系が得られる。

5.5 系

G/H を既約半単純対称空間とする。この時、次の 3 条件は同値：

1. G の任意の算術的離散部分群が G/H に固有不連続に作用する。
2. G のある算術的離散部分群が G/H に固有不連続に作用する。
3. G/H は、リーマン対称空間である。

5.6 系

H が G の極大階数簡約部分群である時 G/H が一様格子を持つためには、

$$\mathrm{rank}(H \cap K) = \mathrm{rank} K$$

なるを要する。

5.7 例

1. $G/H = GL(n, \mathbf{C})/GL(n, \mathbf{R})$ に固有不連続に作用する離散部分群は有限群に限る。

2. $G/H = SO(i+k, j+l)/SO(i,j) \times SO(k,l)$ に一様格子があるためには i, j, k, l のうち少なくとも2つ以上が偶数であり、かつ、$(k-l)(i-j) < 0$ でなければいけない。

3. $G/H = Sp(2n, \mathbf{R})/Sp(n, \mathbf{C})$ には、$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}$ (n 個の直和) に同型な G の離散部分群が自由かつ固有に作用するが、一様格子は存在しない。

5.8 一様格子を持つ等質空間

定理 5.1 と定理 5.2 の判定条件を用いて次の結果が得られる。

定理 次の系列の簡約型等質空間 にはそれぞれ一様格子及び一様でない格子が存在する。

$$\begin{array}{ll} SO(2,2n)/U(1,n) & SO(2,2n)/SO(1,2n), \\ SO(4,4n)/Sp(1,n) & SO(4,4n)/SO(3,4n), \\ U(2,2n)/Sp(1,n) & U(2,2n)/U(1) \times U(1,2n). \end{array}$$

このうち $SO(p+1,q)/SO(p,q)$ 型の2系列については [7] で既に知られている。また、上の簡約型等質空間には、G 不変な複素構造を持つものが2系列ある。

6 証明について

この節では、ぜん節の結果の証明のスケッチを述べよう。

定理 5.1 は Cartan 分解を用いて L と H が共に可換群である時に帰着できる。この場合には作用が固有となるための条件がリー環の各ルート空間への作用を用いて捉えられる。詳細は技術的なので省く。

定理 5.2 はリー群の問題をそれに含まれる離散群の問題に再び直し、次の補題を用いることによって得られる。

6.1 補題

G の離散部分群 Γ が G/H に固有不連続に作用しているとする。

1. $\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトならば、

$$\mathrm{vcd}(\Gamma) = \mathrm{d}(G) - \mathrm{d}(H).$$

2. $\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトでないならば

$$\mathrm{vcd}(\Gamma) < \mathrm{d}(G) - \mathrm{d}(H) \text{ または } \Gamma \text{ は有限生成ではない。}$$

ここで $\mathrm{vcd}(\Gamma)$ は Γ に指数有限の捻れのない (torsion free) 部分群 Γ' が存在するとき、整数 $\mathbf{Z}$ の Γ' の自明な作用による群環 $\mathbf{Z}(\Gamma')$-加群としての射影的次元として定義される。これは、 Γ' の取り方に依存しない。

この補題は、Γ を 必要ならば、Γ に含まれる捻れのない指数有限部分群 Γ' に置き換え、正規被覆 $G/H \to \Gamma\backslash G/H$ に対応する Serre のスペクトル系列を計算する事によって位相幾何の問題に帰着される。

6.2 系 5.5 の証明のスケッチ

系 5.5 は、算術的離散群の vcd に関する Borel-Serre の結果 と上の補題 6.1 から不等式：

$$\mathbf{R}\text{-rank}G \leq \mathbf{R}\text{-rank}H + \mathrm{d}(H)$$

を満たす半単純空間を探すことに帰着する。最終的には、対称空間の分類を使う。

6.3 系 5.6 の証明のスケッチ

系 5.6 は、G/H とホモトピー同値である $K/H \cap K$、及び G/H のコンパクト型 G_U/H_U の各オイラー指標を用いて $\Gamma\backslash G/H$ のオイラー指標を別々に表示し、それを比較することによって得られる。前者は Serre のスペクトル系列に Euler-Poincare 原理を用いて群のコホモロジーを援用して表され、後者は第 2節の Hirzebruch の比例性原理 によって表される。
もっと一般に次が予想される。

6.4 予想

簡約型等質空間 G/H が一様格子を持つためには、

$$\mathrm{rank}G + \mathrm{rank}(H \cap K) \geq \mathrm{rank}H + \mathrm{rank}K$$

なるを要する。

参考文献

[1] A.Borel, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, Topology, 2, pp.111-122, 1963

[2] A.Borel and Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, Ann. of Math., 75, pp.485-535, 1962

[3] E.Calabi and L.Markus, Relativistic space forms, Ann. of Math., 75 pp.63-76, 1962

[4] F.Hirzebruch, Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch, Symposium Internacional de Topologia algebraica, pp.129-144, 1956

[5] T.Kobayashi. Proper action on a homogeneous space of reductive type, Math.Ann. (in press) 1989

[6] T.Kobayashi and K.Ono. Note on Hirzebruch's proportionality principle, to appear,

[7] R.S.Kulkarni. Proper actions and pseudo-riemannian space forms. Proper actions and pseudo-Riemannian space forms, Advances in Math., 40, pp.10-51, 1981.

[8] R.S.Palais, On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, Ann. of Math., 73, pp.295-323, 1961

[9] I.Satake, On a generalization of the notion of manifold, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 42, pp.359-363, 1956

[10] J.P.Serre, Cohomologie des groupes discrètes, Annals of Math. Studies, Vol.70, Princeton Univ. Press, pp. 77-169, 1971

[11] N.R.Wallach, Two problems in the theory of automorphic forms, Open Problems in Representation Theory, Proceedings held at Katata, 1986. pp.39-40,

[12] J.A.Wolf, The Clifford-Klein space forms of indefinite metric, Ann. of Math., 75, pp.77-80 1962

[13] ———, *Spaces of constant curvature*. 5-th ed., Publish of Perish, Inc., Wilmington, Delaware, 1984