平成２８年度

修士論文題目

Minimal representations of $\widetilde{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R})$ and $\widetilde{\mathrm{O}}(3,4)$
（$\widetilde{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R})$ と $\widetilde{\mathrm{O}}(3,4)$ の極小表現）

学生証番号	45-156025
フリガナ	タモリ　ヒロヨシ
氏名	田森　宥好

論文内容の要旨

修士論文題目

Minimal representations of $\widetilde{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R})$ and $\widetilde{\mathrm{O}}(3,4)$

($\widetilde{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R})$ と $\widetilde{\mathrm{O}}(3,4)$ の極小表現)

氏名　田森　宥好

実単純リー群 G の極小表現とは，無限次元既約表現の中で最も退化している小さい表現である．T. Kobayashi によって提示された視点として，退化した小さい表現は，大きな対称性を持つとみなせる．つまり一つの極小表現に対して様々な実現（モデルと呼ばれる）を構成することで，様々な視点でその大きな対称性を記述することができ，表現論の枠組みを超えた分野の数学が交差する場が提供される．本論文の目的は，ある極小表現の新しいモデルを与え，その構造を記述することである．

K を G の極大コンパクト部分群とする．M の有限次元表現 (τ, V) と双対の元 $\nu \in \mathfrak{a}^\vee$ から定まる放物型部分群 $Q = MAN$ の表現を V_ν とし，$C^\infty(G/Q, V_\nu)$ を放物型誘導表現とする．G-絡作用素（共変微分）$D\colon C^\infty(G/Q, V_\nu) \to C^\infty(G/Q, V_\nu \otimes \mathfrak{g}^\vee)$ を $f(g)(X) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(g\exp(tX))$ によって定める．

Theorem 1. 共変微分の合成 $D \circ D$ に，ある $\mathfrak{g}^\vee \otimes \mathfrak{g}^\vee$ の G-部分表現 $W^\vee$ への射影 $\mathfrak{g}^\vee \otimes \mathfrak{g}^\vee \twoheadrightarrow W^\vee$ を更に合成してできる $C^\infty(G/Q, V_\nu)$ から $C^\infty(G/Q, V_\nu \otimes W^\vee)$ への G-絡作用素を，D_{proj} とする．このとき K-有限ベクトルの空間 $(\operatorname{Ker} D_{\mathrm{proj}})_K$ の無限次元の既約部分商は極小表現となる．

G を不定値直交群 $\mathrm{O}(3,4)$ の単位元成分の普遍（四重）被覆群 $\widetilde{\mathrm{O}}_0(3,4)$，$Q$ と ν を特別なものとしてとり，V を $\mathrm{SU}(2)$ の自然表現から得られる表現 $\mathbb{C}^2$ とする．このとき，以下の定理 2 で $(\operatorname{Ker} D_{\mathrm{proj}})_K$ を具体的に決定し，$\widetilde{\mathrm{O}}_0(3,4)$ の極小表現 $\pi_{\mathfrak{o}(3,4)}$ の解空間モデルを構成した．

Theorem 2. *(1)* 次をみたす二つの二階の $\widetilde{\mathrm{O}}_0(3,4)$-絡微分作用素

$$T_{-2f_2}\colon C^\infty(G/Q, \mathbb{C}^2_\nu) \to C^\infty(G/Q, \mathbb{C}^2_{\nu+2f_2}), \quad T_{-f_1+f_3}\colon C^\infty(G/Q, \mathbb{C}^2_\nu) \to C^\infty(G/Q, \mathbb{C}^2_{\nu+f_1-f_3})$$

が存在する．ここで f_1, f_2, f_3 はある $\mathfrak{a}^\vee$ の元である．

（a）$\operatorname{Ker} D_{\mathrm{proj}} = \operatorname{Ker} T_{-2f_2} \cap \operatorname{Ker} T_{-f_1+f_3}$ となる．

（b）部分群 $\widetilde{\mathrm{O}_0}(2,3)$ への制限写像を rest とする．T_{-2f_2} は以下の $\widetilde{\mathrm{O}_0}(2,3)$-絡作用素からなる図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(G/Q, \mathbb{C}^2_\nu) \arrow[r, "T_{-2f_2}"] \arrow[d, "\mathrm{rest}"] & C^\infty(G/Q, \mathbb{C}^2_{\nu+2f_2}) \arrow[d, "\mathrm{rest}"] \\
C^\infty(\widetilde{\mathrm{O}_0}(2,3)/Q'', \mathbb{C}^2_{\nu|_{\mathfrak{a}''}}) \arrow[r, "\widetilde{\Delta}"] & C^\infty(\widetilde{\mathrm{O}_0}(2,3)/Q'', \mathbb{C}^2_{\nu|_{\mathfrak{a}''}+2f_2})
\end{tikzcd}$$

ここで $Q'' = Q \cap \widetilde{\mathrm{O}_0}(2,3)$，$\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{o}(2,3)$ とした．$\widetilde{\mathrm{O}_0}(2,3)$-絡作用素 $\widetilde{\Delta}$ は *Kobayashi-Ørsted* による山辺作用素であり，$\operatorname{Ker} \widetilde{\Delta}$ は $\mathrm{Mp}(4,\mathbb{R}) \cong \widetilde{\mathrm{O}_0}(2,3)$ を通して偶関数からなる *Weil* 表現とその複素共役の直和と一致する．

（c）部分群 $\widetilde{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R})$ への制限写像を rest とする．$T_{-f_1+f_3}$ は以下の $\widetilde{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R})$-絡作用素からなる図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(G/Q, \mathbb{C}^2_\nu) \arrow[r, "T_{-f_1+f_3}"] \arrow[d, "\mathrm{rest}"] & C^\infty(G/Q, \mathbb{C}^2_{\nu+f_1-f_3}) \arrow[d, "\mathrm{rest}"] \\
C^\infty(\widetilde{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R})/Q', \mathbb{C}^2_{\nu|_{\mathfrak{a}'}}) \arrow[r, "T'_{-f_1+f_3}"] & C^\infty(\widetilde{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R})/Q', \mathbb{C}^2_{\nu|_{\mathfrak{a}'}+2f_2})
\end{tikzcd}$$

ここで $Q' = Q \cap \widetilde{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R})$，$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ とした．$\operatorname{Ker} T'_{-f_1+f_3}$ は *Kubo-Ørsted* により $\widetilde{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R})$ の極小表現 $\pi_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})}$ となることが示されている．

(2) $\mathrm{SU}(2)$ の次元 n の既約表現を $\mathbb{C}^n$ と表す．このとき $K \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ の表現として

$$(\operatorname{Ker} D_{\mathrm{proj}})_K = (\operatorname{Ker} T_{-2f_2} \cap \operatorname{Ker} T_{-f_1+f_3})_K \cong \bigoplus_{1 \le n} \mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$$

であり，$(\mathfrak{o}(3,4), K)$-加群として既約である．

また，本論文では誘導表現でのリー環の作用の一部を計算することで，$\pi_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})}, \pi_{\mathfrak{o}(3,4)}$ の作用を記述した．実現での微分作用素の核を具体的に計算するという手法と，誘導表現での作用の記述を用いる手法の二通りの方法で，定理 2 の放物型誘導表現への $\pi_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})}, \pi_{\mathfrak{o}(3,4)}$ の埋め込みの像を決定した（定理 3）．なお $\pi_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})}$ での前者での方法は Kubo-Ørsted によってすでに与えられたものである．$\widetilde{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群を $\mathrm{SU}(2)$ とみなす．$\mathbb{C}^n \cong S^{n-1}(\mathbb{C}^2)$ の，$\mathbb{C}^2$ の標準的な内積から誘導されるユニタリ内積を $(,)_{\mathbb{C}^n}$ と表す．また $\{e_1, e_2\}$ を $\mathbb{C}^2$ の標準的な正規直交基底とする．分解 $G = KQ$ により，放物型誘導表現は K 上の関数とみなせる．$\pi_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})} \cong \bigoplus_{1 \le n} \mathbb{C}^{4n-2}$ であることが Torasso により知られている．

Theorem 3. $(z)_l$ を *Pochhammer* 記号とする：$(z)_l = \Gamma(z+l)\Gamma(z)^{-1}$.

(1) $\pi_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})}$ の $\mathbb{C}^{4n-3}$*-type* は $\mathrm{SU}(2)$ 上の関数の集合 $\{(k^{-1}v, \omega'_n)_{\mathbb{C}^{4n-2}} \mid v \in \mathbb{C}^{4n-2}\} \subset C^\infty(G/Q, \mathbb{C}^2_{\nu'})$ で与えられる．ここで ω'_n は次で与えられる $S^{4n-3}(\mathbb{C}^2)$ の元である．

$$\omega'_n := (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)_{n-1} 2^{n-1} \sum_{0 \le l \le n-1} \frac{(-n+1)_l(-2n+3/2)_l}{(-n+3/2)_l(1)_l} e_1^{4n-3-2l} e_2^{2l}.$$

(2) $\pi_{\mathfrak{o}(3,4)}$ の $\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$*-type* は K 上の関数の集合 $\{(k^{-1}v, \omega_n)_{\mathbb{C}^{4n-2}} \mid v \in \mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n\} \subset C^\infty(G/Q, \mathbb{C}^2_\nu)$ で与えられる．ここで ω_n は次で与えられる $S^{2n-1}(\mathbb{C}^2) \otimes S^{n-1}(\mathbb{C}^2) \otimes S^{n-1}(\mathbb{C}^2)$ の元である．

$$\begin{aligned}\omega_n := (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)_{n-1} 2^{n-1} &\sum_{0 \le l_1, l_2 \le n-1} \frac{(-n+1)_{l_1+l_2}(-n+1/2)_{l_1}(-n+1)_{l_2}}{(-n+3/2)_{l_1+l_2}(1)_{l_1}(1)_{l_2}} \\ &\cdot e_1^{2n-1-2l_1} e_2^{2l_1} \otimes e_1^{n-l_2-1} e_2^{l_2} \otimes e_1^{n-l_2-1} e_2^{l_2}.\end{aligned}$$

更に，作用の記述の系として，$\pi_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}, \pi_{\mathfrak{o}(3,4)}$ の作用で不変な Hermite 内積を得た．定理 3 の ω'_n, ω_n との行列要素によって $\pi, \pi_{\mathfrak{o}(3,4)}$ をそれぞれ $\bigoplus_{1 \le n} \mathbb{C}^{4n-2}$，$\bigoplus_{1 \le n} \mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ と同一視する．

Theorem 4. *(1)* $\mathrm{SU}(2)$ 不変なエルミート内積
$(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})}|_{\mathbb{C}^{4n-2}} := 2^{-6n+3}(1)_{4n-2}(1/2)_n^{-2}(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}^{4n-2}}$ によって $\pi_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})}$ はユニタリ化可能である．

(2) K 不変なエルミート内積 $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{o}(3,4)}|_{\mathbb{C}^{2n}\otimes\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n} := n^{-1}(1)_{2n-1}(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}^{2n}\otimes\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n}$ によって $\pi_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})}$ はユニタリ化可能である．

また，$\pi_{\mathfrak{o}(3,4)}$ のいくつかの部分群への分岐則を具体的に与えた．

Proposition 5. *(1)* $(\mathfrak{o}(2,4), \mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))$-加群として，$\pi_{\mathfrak{o}(3,4)}$ は既約表現二つの直和へと分解する．

(2) $(\mathfrak{o}(3,3), \mathrm{SU}(2) \times \operatorname{diag}\mathrm{SU}(2))$-加群として，$\pi_{\mathfrak{o}(3,4)}$ は既約表現二つの直和へと分解する．

(3) $(\mathfrak{g}_{2,-2}, \operatorname{diag} SU \times \mathrm{SU}(2))$-加群として，$\pi_{\mathfrak{o}(3,4)}$ は既約である．

$\mathfrak{g}_{2,-2}$ に制限しても既約であることに関しては，すでに D. Vogan によって与えられている．他の二つは，既約ユニタリ表現が有限個の既約表現の直和に分解する新しい例となる．