平成 25 年度

修士論文題目

Obstructions for the existence of compact manifolds locally modelled on homogeneous spaces

(等質空間を局所モデルとするコンパクト多様体の
存在に対する障害)

学生証番号　45-126041
フリガナ　モリタ ヨウスケ
氏名　森田 陽介

論文内容の要旨

修士論文題目

Obstructions for the existence of compact manifolds
locally modelled on homogeneous spaces
(等質空間を局所モデルとするコンパクト多様体の存在に対する障害)

氏名　森田 陽介

G を Lie 群, H を G の閉部分群とする. G/H の開集合を G の元で貼り合わせて作った多様体のことを, G/H を局所モデルとする多様体という. 典型的な例は Clifford–Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ である.

G を線型簡約 Lie 群, H を G の簡約部分群とする. H がコンパクトなとき, G/H は常にコンパクトな Clifford–Klein 形を持つことが A. Borel によって証明されている. 一方, H がコンパクトでない場合には, G/H がコンパクトな Clifford–Klein 形を持つとは限らない. どのような場合に G/H がコンパクト Clifford–Klein 形を持つか, という問題は, 80 年代後半の小林俊行氏による研究を契機として活発に研究され始めた. 現在までに, 小野薫, Y. Benoist, F. Labourie, G. Margulis, S. Mozes, R. J. Zimmer をはじめとした多くの数学者が, 異なった視点・手法から様々な結果を導いている. 本論文の目的は, そのような等質空間の新しい例を与えることである.

G の極大コンパクト部分群 K を, $K \cap H$ が H の極大コンパクト部分群となるように取る. G, H, K の Lie 環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ とし, それらの複素化を $\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}, \mathfrak{k}_\mathbb{C}$ とおく. $\{P|_{\mathfrak{h}_\mathbb{C}} : P \in (S^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^*)^{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}\}$ が生成する $(S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^*)^{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ のイデアルを $J_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C})}$ とおく. 以上の設定の下, 本論文の主結果は次のように述べられる.

定理 1. (cf. Theorem 1.1) 以下の 3 つの条件を考える:

(1.a) $Q \in (S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^*)^{\mathfrak{h}_\mathbb{C}}$ であって, $Q \notin J_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C})}$ および $Q|_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}\cap\mathfrak{h}_\mathbb{C}} = 0$ を満たすものが存在する.
(1.b) 準同型 $i : H^\bullet(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}; \mathbb{C}) \to H^\bullet(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{k}_\mathbb{C} \cap \mathfrak{h}_\mathbb{C}; \mathbb{C})$ が単射でない.
(1.c) G/H を局所モデルとするコンパクト多様体が存在しない.

このとき, (1.a) $\Rightarrow$ (1.b) $\Rightarrow$ (1.c) が成り立つ.

さらに, 既約な対称空間であって (1.b) を満たすものを全て分類した.

定理 2. (cf. Theorem 1.2, Theorem 7.1) 既約な対称空間 G/H に対して, 次の 3 つの条件は同値である:

(i) G/H は (1.a) を満たす.
(ii) G/H は (1.b) を満たす.
(iii) $\operatorname{rank}\mathfrak{h} > \operatorname{rank}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})$ であり, かつ $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は以下のどれとも同型でない:

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	条件
$\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{l}$	$\Delta\mathfrak{l}$	$\mathfrak{l}$: 単純 Lie 環
$\mathfrak{l}_\mathbb{C}$	$\mathfrak{l}$	$\mathfrak{l}$: 単純 Lie 環
$\mathfrak{sl}(2n+1, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$	$n \geqslant 1$
$\mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$	$n \geqslant 1$
$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n-1, \mathbb{C})$	$n \geqslant 3$

$\mathfrak{e}_{6,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{f}_{4,\mathbb{C}}$	—

表 1: (1.b) を満たさない $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$

この分類から, コンパクト多様体の局所モデルにならない既約な対称空間の例が多数得られる. それらの中には, 今までコンパクト Clifford–Klein 形を持つかどうか知られていなかったものも存在する:

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	条件
$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(p,q)$	p, q: 奇数
$\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2)$	$n \geqslant 2$
$\mathfrak{so}(n,n)$	$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$	$n \geqslant 2$
$\mathfrak{so}(p+r,q+s)$	$\mathfrak{so}(p,q) \oplus \mathfrak{so}(r,s)$	p, q: 奇数, $r \geqslant 1$
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{su}(2)$	—

表 2: コンパクト Clifford–Klein 形を持ち得ない対称空間 G/H の新しい例

非対称な等質空間に対しては, 例えば次のような結果が定理 1 から得られる.

系 3. (cf. Corollary 1.3, Corollary 6.9) G/H が

- $SL(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{R})/(SL(n_1,\mathbb{R})\times\cdots\times SL(n_k,\mathbb{R})) \quad (n_1, n_2 \geqslant 3)$,
- $SL(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{C})/(SL(n_1,\mathbb{C})\times\cdots\times SL(n_k,\mathbb{C})) \quad (n_1, n_2 \geqslant 2)$,
- $SL(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{H})/(SL(n_1,\mathbb{H})\times\cdots\times SL(n_k,\mathbb{H})) \quad (n_1, n_2 \geqslant 2)$,
- $O(p_1+\cdots+p_k, q_1+\cdots+p_k)/(O(p_1,q_1)\times\cdots\times O(p_k,q_k)) \quad (p_1, q_1$: 奇数, $p_2 \geqslant 1)$,
- $O(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{C})/(O(n_1,\mathbb{C})\times\cdots\times O(n_k,\mathbb{C})) \quad (n_1, n_2 \geqslant 2$ または n_1: 偶数, $n_2 = 1)$,
- $Sp(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{C})/(Sp(n_1,\mathbb{C})\times\cdots\times Sp(n_k,\mathbb{C})) \quad (n_1, n_2 \geqslant 1)$

のいずれかと同型であるとき, G/H を局所モデルとするコンパクト多様体は存在しない.

最後に定理 1 (1.b) $\Rightarrow$ (1.c) の証明のアイデアを述べる. ここでは面倒な議論を避けるため問題を簡単にして, (1.b) ならば G/H の Clifford–Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトになり得ないことを見よう. さらに, G/H に対応するコンパクト等質空間 G_U/H_U が取れることを仮定し (例えば $G/H = SL(p+q,\mathbb{R})/SO(p,q)$ のとき $G_U/H_U = SU(p+q)/SO(p+q)$), H が連結なことも仮定する. このとき準同型 $i : H^\bullet(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}; \mathbb{C}) \to H^\bullet(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{k}_\mathbb{C} \cap \mathfrak{h}_\mathbb{C}; \mathbb{C})$ は $\pi^* : H^\bullet(G_U/H_U;\mathbb{C}) \to H^\bullet(G_U/(K\cap H_U);\mathbb{C})$ と自然に同一視される. 以下の可換図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
H^\bullet(G_U/H_U;\mathbb{C}) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\pi^*"] & H^\bullet(\Gamma\backslash G/H;\mathbb{C}) \arrow[d, "\pi^*"] \\
H^\bullet(G_U/(K\cap H_U);\mathbb{C}) \arrow[r, "\eta"] & H^\bullet(\Gamma\backslash G/(K\cap H);\mathbb{C}).
\end{tikzcd}$$

ここで $\eta : H^\bullet(G_U/H_U;\mathbb{C}) \to H^\bullet(\Gamma\backslash G/H;\mathbb{C})$ は小林俊行–小野薫が構成した環準同型である. もし $\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトならば, η は単射になるという性質を持つ. 一方, ファイバー束 $\pi : \Gamma\backslash G/(K\cap H) \to \Gamma\backslash G/H$ は可縮なファイバーを持つから, コホモロジー間の環準同型 $\pi^* : H^\bullet(\Gamma\backslash G/H;\mathbb{C}) \to H^\bullet(\Gamma\backslash G/(K\cap H);\mathbb{C})$ は同型となる. 従って, (1.b) が成り立つならば $\Gamma\backslash G/H$ は非コンパクトでなくてはならない.