

博士課程学生 (Doctoral Course Students)

森田 陽介 (MORITA Yosuke)

(学振 DC1)

(FMSP コース生)

A. 研究概要

等質空間 G/H の開集合を G の作用で貼り合わせて得られる空間 M のことを, G/H を局所モデルに持つ多様体という. 例えば G の離散部分群 Γ が G/H に固かつ自由に作用するとき, $\Gamma \backslash G/H$ は G/H を局所モデルに持つ多様体になる. このとき $\Gamma \backslash G/H$ を Clifford–Klein 形, Γ を G/H の不連続群という. G/H 上の G -不変微分形式が与えられると, G/H を局所モデルとする多様体 M の上に自然に微分形式が定まる. この対応はコホモロジー間の準同型 $\eta: H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(M; \mathbb{R})$ を誘導する. この準同型 η から, 与えられた等質空間 G/H を局所モデルに持つコンパクト多様体が存在するための障害が幾つか得られることが知られている. 本年度は以下の結果を得た:

- 1) 過去に得られていた η から導かれる障害を, 非簡約な状況に拡張した. 例えば, 可解な実線型代数群の 1 次元以上の余随伴軌道を局所モデルとするコンパクト多様体は存在しない.
- 2) コンパクト Clifford–Klein 形の存在に対する新たな障害を発見した. 証明の鍵となるアイデアは, 不連続群のコホモロジー次元の上界の評価を, 準同型 η と組み合わせることである. 応用として, $p, q \geq 1$ かつ q が奇数のとき, 完備, コンパクトで正の定曲率を持つ符号 (p, q) の擬リーマン多様体は存在しないことが分かった.

A manifold M is said to be locally modelled on a homogeneous space G/H if it is covered by open sets that are diffeomorphic to open sets of G/H and their transition functions are locally in G . For instance, if Γ is a discrete subgroup of G acting properly and freely on G/H , then $\Gamma \backslash G/H$ becomes a manifold locally modelled on G/H . In this case, $\Gamma \backslash G/H$ is called a Clifford–Klein form and Γ is called a discontinuous group for G/H . For each G -invariant differential form on G/H , we can assign the “locally G -invariant” differential form on a manifold M locally modelled on G/H . This assignment induces a homomorphism $\eta: H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(M; \mathbb{R})$. It has

been known that the homomorphism η gives some obstructions to the existence of a compact manifold locally modelled on a given homogeneous space G/H .

In this academic year, I obtained the following results:

- 1) I generalized my previous obstruction arising from η to the nonreductive case. For instance, there does not exist a compact manifold locally modelled on a positive dimensional coadjoint orbit of a solvable real linear algebraic group.
- 2) I found a new obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms of G/H . The key idea is to combine the homomorphism η with an upper-bound estimate for cohomological dimensions of discontinuous groups. As an application, I proved that, if $p, q \geq 1$ and q is odd, there does not exist a compact complete pseudo-Riemannian manifold of signature (p, q) with constant positive sectional curvature.

B. 発表論文

1. Y. Morita: “A topological necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms”, *J. Differential Geom.* **100** (2015), 533–545.
2. Y. Morita: “Obstructions for the existence of compact manifolds locally modelled on homogeneous spaces”, 東京大学修士論文 (2014).
3. Y. Morita: “Semisimple symmetric spaces without compact manifolds locally modelled thereon”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **91** (2015), 29–33.
4. Y. Morita: “Homogeneous spaces of nonreductive type locally modelling no compact manifold”, arXiv:1508.04862, preprint.
5. Y. Morita: “A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms”, arXiv:1601.07359, preprint.

C. 口頭発表

1. A necessary condition for the existence of compact manifolds locally modelled on homogeneous spaces, 第 61 回幾何学シンポジウム, 名城大学, 2014 年 8 月.

2. A necessary condition for the existence of compact manifolds locally modelled on homogeneous spaces, Rigidity School, Tokyo 2014, 東京大学, 2014 年 11 月.
3. 等質空間を局所モデルとするコンパクト多様体が存在するための障害, 広島大学トポロジー・幾何セミナー, 広島大学, 2014 年 12 月.
4. A necessary condition for the existence of compact manifolds locally modelled on homogeneous spaces, 2015 East Asian Core Doctorial Forum on Mathematics, 国立台湾大学, 2015 年 1 月.
5. Volume forms and compact Clifford–Klein forms, ワークショップ「不連続群の変形とその周辺」, 名古屋大学, 2015 年 2 月.
6. 等質空間がコンパクト商を持つための位相的制約, 日本数学会 2015 年度年会, 明治大学, 2015 年 3 月.
7. Cohomological obstructions to the existence of compact Clifford–Klein forms, Mathematical Symposium ENS Lyon–Todai, École Normale Supérieure de Lyon, 2016 年 6 月 (ポスター発表).
8. Homogeneous spaces locally modelling no compact manifold, 第 15 回関東若手幾何セミナー, 慶應義塾大学, 2015 年 10 月.
9. コンパクト Clifford–Klein 形の存在問題について, 2015 年度表現論シンポジウム, 公共の宿おとり荘, 2015 年 11 月.
10. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms, Berkeley–Tokyo Winter School “Geometry, Topology and Representation Theory”, University of California, Berkeley, 2016 年 2 月.

G. 受賞

1. 理学部学修奨励賞 (2012).
2. 東京大学総長賞 (2012).
3. 数理科学研究科長賞 (2014).