

修士課程学生 (Master's Course Student)
島本 直弥 (SHIMAMOTO Naoya)

A. 研究概要

旗多様体 G/P 上の, G の閉部分群 H による軌道分解の振る舞いに関して, すなわち軌道の個数の有限性や開軌道の存在, 軌道分解の具体的な記述について研究を行った. 特に本年は, 多重旗多様体 G/P として一般線形群のミラボリック部分群による旗多様体の直積を, H として一般線形群の直積群の対角部分群を考えた. すなわちこれは射影空間の直積空間の, 一般線形群の対角作用による軌道分解を考察していることにほかならない.

一般に実簡約群 G の極小放物型部分群 P に対して, 旗多様体 G/P 上の H -軌道が有限個であることと開軌道が存在することとは同値であり (松木), さらに開軌道が存在することと, H の有限次元既約表現から誘導される G の表現内に現れる G の既約許容表現の重複度の有限性とが同値であることが小林-大島によって示されている. また, Beilinson-Bernstein および Brylinski-柏原によって, 表現の重複度を記述する Kazhdan-Lusztig 多項式と旗多様体 G/B 上の軌道分解が密接に関係していることが示された. これらのことからわかるように, 旗多様体上の軌道分解について, 軌道の個数の有限性や開軌道の存在, 軌道分解の具体的な記述について調べることは表現論に対して重要な役割を果たすと期待される.

本年, 私は上記の設定 (射影空間の直積空間上への一般線形群の対角作用) において, 開軌道が存在する必要十分条件を示した (軌道が有限個になる必要十分条件については Magyar-Weyman-Zelevinsky によって既に証明されている). そして開軌道が存在しつつも軌道が無限個になる場合 (P が極小放物型部分群であればこの状況は起こりえない) の一部において, 多重旗多様体をまず粗く有限個の $\text{diag}(GL)$ -不変な部分集合らに分解し (これらの $\text{diag}(GL)$ -不変部分集合は組合せ論的に特徴づけられる), 無限個ある軌道のうち性質の似たもの同士を一つの塊として捉えるという手法によって, 軌道分解を具体的に記述し, また軌道閉包関係も完全に記述した.

I studied the behavior of the orbit decompositions of flag varieties G/P under the actions of subgroups H of G : finiteness of orbits, existence of open orbits, and descriptions of or-

bit decompositions. In particular in this year, I considered direct product spaces of flag varieties of general linear groups with respect to the mirabolic subgroups as multiple flag varieties G/P , and the diagonal subgroups of the direct product groups of general linear groups as H . Namely I studied the orbit decompositions of direct products of projective spaces under the diagonal actions of general linear groups.

In general, finiteness of H -orbits on G/P and existence of open H -orbits are equivalent where G is a real reductive group, and P is a minimal parabolic subgroup of G (Matsuki). Furthermore, Kobayashi-Oshima has proved the equivalence between existence of open H -orbits on G/P and finiteness of multiplicities of irreducible admissible representations of G occurring in induced representations from finite dimensional irreducible representations of H . On the other hand, it is proved by Brylinski-Kashiwara that Kazhdan-Lusztig polynomial which is describing multiplicities of representations is intimately related to the orbit decomposition of flag varieties G/P . From these result, it is expected that studying finiteness of orbits, existence of open orbits, and explicit description of orbits on G/P plays a role on representation theory.

In this year, I introduced a necessary and sufficient condition of the multiple flag varieties G/P (the direct product spaces of projective spaces) to have open $\text{diag}(GL)$ -orbits (a necessary and sufficient condition for finiteness of orbits is proved by Magyar-Weyman-Zelevinsky). Then for the cases where G/P have infinitely many orbits and open orbits simultaneously (this situation can not happen if P is minimal), I gave an explicit description of orbit decompositions and closure relations among orbits by using a technique decomposing the multiple flag varieties into finitely many $\text{diag}(GL)$ -stable subsets roughly (these $\text{diag}(GL)$ -stable subsets are characterised combinatorially) and treating infinitely many orbits which have similar properties to each others as a clump.

B. 発表論文

1. N. Shimamoto: "Description of infinite or-

bits on multiple flag varieties”, Master’s thesis in Univ. of Tokyo, 2015, 69 pp.

2. N. Shimamoto: “The orbit decompositions of multiple flag manifolds of $SL(3, \mathbb{C})$ under the diagonal action”, to appear in 数理解析研究所講究録 (2015) 「組合せ論的表現論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, (ed. K. Naoi), 16 pp.

C. 口頭発表

1. The orbit decompositions of multiple flag manifolds of $SL(3, \mathbb{C})$ under the diagonal action, RIMS 研究集会「組合せ論的表現論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 2015 年 10 月.

D. 講義 (学生さんは記入されなくてもよい。)

E. 修士・博士論文 (学生さんは記入されなくてもよい。)

F. 対外研究サービス

G. 受賞

H. 海外からのビジター