修士課程学生 (Master's Course Student)
中濱 良祐 (NAKAHAMA Ryosuke)

A. 研究概要

私は今年度ユークリッド型ジョルダン代数およびエルミート型ジョルダン三重系の理論を用いて，エルミート型単純リー群のスカラー値ユニタリ最高ウェイト表現の研究を行った．

まず，tube 型のエルミート型リー群 G は，あるユークリッド型ジョルダン代数 $\mathfrak{n}^+$ の共形変換群になっている．このことを用いると，この群のスカラー値正則離散系列表現を具体的な関数空間上，例えば対称錐 $\Omega \subset \mathfrak{n}^+$ 上のある測度に関する二乗可積分空間 $L^2_\lambda(\Omega)$, 或いは管状領域 $T_\Omega = \mathfrak{n}^+ + \sqrt{-1}\Omega \subset \mathfrak{n}^+_{\mathbb{C}}$, 有界対称領域 $D \subset \mathfrak{n}^+_{\mathbb{C}}$ 上の複素直線束の二乗可積分正則切断の空間 $\Gamma(T_\Omega, \mathcal{L}_\lambda)$, $\Gamma(D, \mathcal{L}_\lambda)$ 上などに実現できる．これらの空間はパラメータ λ に関して解析接続することができ，$L^2_\lambda(\Omega)$ の解析接続はある部分多様体 $\overline{\mathcal{O}_l} \subset \partial\Omega$ 上の二乗可積分空間，$\Gamma(T_\Omega, \mathcal{L}_\lambda), \Gamma(D, \mathcal{L}_\lambda)$ のそれはある微分方程式を満たす切断であって，(通常の積分では表せない) あるノルムが有限であるようなもの全体の空間となる．

エルミート型リー群 G のユニタリ最高ウェイト表現は，自然に Olshanskii 半群と呼ばれる複素半群 $G\exp(iC) \subset G^{\mathbb{C}}$ ($C \subset \mathfrak{g}$ は $Ad(G)$-不変な錐) の強連続な表現に延長される．小林-真野は $SO(n,2)$ の極小表現を光錐上に実現し，G の極大コンパクト部分群 K の中心の延長に当たる 1 次元部分半群の作用の具体的な形を与えた．これは，積分核にベッセル関数を用いた積分作用素として与えられる．私はジョルダン代数上の一般化ベッセル関数の精密な上からの評価を与え，この積分核の一般化が任意のスカラー値ユニタリ最高ウェイト表現について $SO(n,2)$ の極小表現の場合と同様の評価をもつことを示した．

また，tube 型のエルミート型リー群のスカラー値最高ウェイト表現の新たな実現 (フォック実現) が，極小の場合に Hilgert-小林-Möllers-Ørsted によって，一般の場合に Möllers によって構成された．この実現では，$\mathfrak{g}$ のカルタン分解を $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ としたとき，$\mathfrak{p}$ またはその部分多様体上の正則二乗可積分空間上に表現が構成される．私はこれを非 tube 型のエルミート型リー群に一般化し，Olshanskii 半群の作用の具体的な形を決定した．ここでもベッセル関数を核に用いた積分作用素が使われている．

This year I studied the unitary highest weight representations of scalar type, using the theory of Euclidean Jordan algebras and Hermitian Jordan triple systems.

First, for any tube type Hermitian Lie group G, there exists a Euclidean Jordan algebra $\mathfrak{n}^+$ such that G is the conformal transformation group of $\mathfrak{n}^+$. Using this, we can realize the holomorphic discrete series representations of scalar type on some explicit functions spaces, for example, the spaces of square integrable functions $L^2_\lambda(\Omega)$ on the symmetric cone $\Omega \subset \mathfrak{n}^+$ with respect to some measures, or the space of square integrable holomorphic sections $\Gamma(T_\Omega, \mathcal{L}_\lambda)$, $\Gamma(D, \mathcal{L}_\lambda)$ of the complex line bundles on the tube domain $T_\Omega = \mathfrak{n}^+ + \sqrt{-1}\Omega \subset \mathfrak{n}^+_{\mathbb{C}}$ or the bounded symmetric domain $D \subset \mathfrak{n}^+_{\mathbb{C}}$. These spaces are analytically continued with respect to the parameter λ. The analytic continuation of $L^2_\lambda(\Omega)$ becomes the space of square integrable functions on some subvariety $\overline{\mathcal{O}_l} \subset \partial\Omega$, and that of $\Gamma(T_\Omega, \mathcal{L}_\lambda)$, $\Gamma(D, \mathcal{L}_\lambda)$ become the spaces of all sections which satisfy some differential equations, and some norm (which cannot be given by ordinary integrals) are finite.

The unitary highest weight representations of the Hermitian Lie group G are naturally extended as the strongly continuous representations of the so-called Olshanskii semigroup $G\exp(iC) \subset G^{\mathbb{C}}$ (here $C \subset \mathfrak{g}$ is an $Ad(G)$-invariant cone). Kobayashi and Mano realized the minimal representation of $SO(n,2)$ on the light cone, and gave the explicit form of the action of the 1-dimensional subsemigroup, which corresponds to the extension of the center of the maximal compact subgroup K of G. This is given as the integral operator whose kernel is written using the Bessel function. I gave the sharp upper estimate of the generalized Bessel functions on Jordan algebras, and proved that, for any unitary highest weight representations of scalar type, the generalization of this integral kernel has the upper estimate similar to the one in the minimal representation of $SO(n,2)$.

Also, for tube type Hermitian Lie groups, the new realization (Fock realization) of the highest weight representaions of scalar type is constructed, by Higert-Kobayashi-Möllers-Ørsted for minimal case, and by Möllers for general case. This is realized on the space of square integrable holomorphic functions on $\mathfrak{p}$ or its subvariety, where $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ is the Cartan decomposition. I generalized this realization for non-tube type Hermitian Lie groups, and decided the explicit form of the action of the Olshanskii semigroup. This is given by the integral operator whose kernel is written using the generalized Bessel functions.

B. 発表論文

1. R. Nakahama, Integral formula and upper estimate of I and J-Bessel functions on Jordan algebras, preprint, arXiv:1211.4702.

2. Analysis of generalized Fock spaces on Jordan pairs (ジョルダン対上の一般化フォック空間の解析), 修士論文.

C. 口頭発表

D. 講義

E. 修士・博士論文

F. 対外研究サービス

G. 受賞