平成 24 年度

修士論文題目

Analysis of generalized Fock spaces on Jordan pairs

(ジョルダン対上の一般化フォック空間の解析)

学生証番号　45-116032
フリガナ　ナカハマ リョウスケ
氏名　中濱 良祐

論文内容の要旨

修士論文題目

Analysis of generalized Fock spaces on Jordan pairs

(ジョルダン対上の一般化フォック空間の解析)

氏名　中濱 良祐

この論文では，tube 型リー環のスカラー値ユニタリ最高ウェイト表現のフォック実現を，一般の tube 型とは限らない単純エルミート型リー環に一般化する．また，(メタプレクティック表現の表現空間としての) 古典的フォック空間上の Howe の振動子半群の，一般化フォック空間上における類似について議論する．

まず，古典的なメタプレクティック表現と振動子半群について簡単に復習する．(古典的) フォック空間を以下で定義する．

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}^r) := \left\{ F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^r) : \int_{\mathbb{C}^r} |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dz < \infty \right\}.$$

また，$\Sigma_r, \Delta_r \subset \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ をそれぞれ虚部が正定値，作用素ノルムが 1 未満であるような複素対称行列全体の空間とする．すると，あるヒルベルト空間 $\mathcal{H}(\Sigma_r) \subset \mathcal{O}(\Sigma_r)$, $\mathcal{H}(\Delta_r) \subset \mathcal{O}(\Delta_r)$ が存在し，$L^2(\mathbb{R}^r)$, $\mathcal{F}(\mathbb{C}^r)$, $\mathcal{H}(\Sigma_r)$, $\mathcal{H}(\Delta_r)$ がユニタリ同値になる．これら 4 つの空間には，斜交群の二重被覆群 $Mp(r, \mathbb{R})$ がユニタリ表現として作用しており，全て同値な表現になっている．

$\mathbb{R}^r$ および $\mathbb{C}^r$ 上では以下のような積分公式が成り立つ．$z \in \mathbb{C}^r$ と，実部が正定値であるような $A \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C})$ に対し，

$$\int_{\mathbb{R}^r} e^{-\pi {}^t x A x - 2\pi\sqrt{-1} {}^t z x} dx = (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi {}^t z A^{-1} z}, \tag{1}$$

また，$u, v \in \mathbb{C}^r$ と，作用素ノルムが 1 未満であるような $A, D \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C})$ に対し，

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{C}^r} e^{\frac{\pi}{2}({}^t w A w + {}^t\overline{w} D \overline{w} + 2{}^t u w + 2{}^t v \overline{w})} e^{-\pi|w|^2} dw \\ &= \det(I - AD)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{2}({}^t u D(I-AD)^{-1} u + 2{}^t v (I-AD)^{-1} u + {}^t v A (I-DA)^{-1} v)}. \end{aligned} \tag{2}$$

$2r$ 次複素対称行列 $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^t B & D \end{pmatrix} \in \Delta_{2r}$ と複素数 $c \in \mathbb{C}^\times$ に対し，積分変換 $cS_{\mathcal{A}} : \mathcal{F}(\mathbb{C}^r) \to \mathcal{F}(\mathbb{C}^r)$ を，

$$\begin{aligned} cS_{\mathcal{A}} F(z) :=& c \int_{\mathbb{C}^r} \exp\left(({}^t z \ {}^t\overline{w}) \begin{pmatrix} A & B \\ {}^t B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \overline{w} \end{pmatrix} \right) F(w) e^{-\pi|w|^2} dy \\ =& c \int_{\mathbb{C}^r} e^{{}^t z A z + 2{}^t z B \overline{w} + {}^t\overline{w} D \overline{w}} F(w) e^{-\pi|w|^2} dy. \end{aligned}$$

で定める．すると (2) より，任意の $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \Delta_{2r}$，$c_1, c_2 \in \mathbb{C}^\times$ に対し，合成 $c_1 S_{\mathcal{A}_1} \circ c_2 S_{\mathcal{A}_2}$ はまたある $\mathcal{A}_3 \in \Delta_{2r}$, $c_3 \in \mathbb{C}^\times$ によって，$c_1 S_{\mathcal{A}_1} \circ c_2 S_{\mathcal{A}_2} = c_3 S_{\mathcal{A}_3}$ の形で表わされる．すなわち，$\{cS_{\mathcal{A}} : c \in \mathbb{C}^\times, \mathcal{A} \in \Delta_{2r}\}$ は半群の構造をもつ．これを振動子半群と呼ぶ．(1) を使えば $L^2(\mathbb{R}^r)$ 上でも同様のことが成り立つ．

次にこれを一般化する．$\mathfrak{g}$ を単純リー環とし，その極大コンパクト部分リー環 $\mathfrak{k}$ が 1 次元の中心をもつと仮定する．するとその複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{k}$ の中心の随伴作用により以下のように分解される．

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^-.$$

このとき $(\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^-)$ はジョルダン対の構造をもつ．ここではさらに $\mathfrak{p}^+$ が複素ジョルダン代数の構造をもつと仮定する．そのような $\mathfrak{g}$ は tube 型と呼ばれる．このとき，$\mathfrak{g}$ はケーリー変換を通じて

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}^- \subset \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^-$$

のように実現される．また，$\mathfrak{n}^+$ はジョルダン代数 $\mathfrak{p}^+$ のユークリッドな実形となっている．このとき，ある錐 $\Omega \subset \mathfrak{n}^+$, 管状領域 $T_\Omega = \mathfrak{n}^+ + \sqrt{-1}\Omega \subset \mathfrak{p}^+$, 有界領域 $D \subset \mathfrak{p}^+$ が存在し，$L/(L \cap K) \simeq \Omega$, $G/K \simeq T_\Omega \simeq D$ が成り立つ．

これらの対称空間を用いると，普遍被覆群 $\tilde{G}$ のユニタリ表現が構成できる．つまり，$\lambda \in \mathbb{R}$ をパラメータとすると，ある λ に対し，ある Ω 上の測度と，それに関する二乗可積分空間 $L^2_\lambda(\Omega)$, およびヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\lambda(T_\Omega) \subset \mathcal{O}(T_\Omega)$, $\mathcal{H}_\lambda(D) \subset \mathcal{O}(D)$ が存在し，これら 3 つの空間上に $\tilde{G}$ がユニタリに作用する．そのような表現が存在する λ の全体は Wallach 集合と呼ばれ，ここでは $\mathcal{W}$ で表わす．またこの表現はスカラー値ユニタリ最高ウェイト表現と呼ばれる．最近になって，新たな空間 $\mathcal{F}_\lambda(\mathfrak{p}^+)$ が Möllers によって以下のように定義された．

$$\mathcal{F}_\lambda(\mathfrak{p}^+) := \left\{ f|_{\mathcal{X}^+_\lambda} : f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p}^+),\ \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathcal{X}^+_\lambda} |f(z)|^2 \mathcal{K}_{\lambda - \frac{n}{r}}(z, \overline{z}) d\nu_\lambda(z) < \infty \right\}.$$

ここで $\overline{\mathcal{X}^+_\lambda}$ は $\mathfrak{p}^+$ の部分多様体 (λ が十分大きい場合は $\overline{\mathcal{X}^+_\lambda} = \mathfrak{p}^+$), $d\nu_\lambda$ は $\overline{\mathcal{X}^+_\lambda}$ 上の K-不変測度, $\mathcal{K}_{\lambda-\frac{n}{r}}$ は一般化ベッセル関数を $\mathfrak{p}^+ \times \mathfrak{p}^-$ 上に伸ばしたものである．これにより，$\tilde{G}$ の表現はメタプレクティック表現の場合と同様に $L^2_\lambda(\Omega), \mathcal{F}_\lambda(\mathfrak{p}^+), \mathcal{H}_\lambda(T_\Omega), \mathcal{H}_\lambda(D)$ の 4 つの実現をもったことになる．

一方，$\mathfrak{g}$ が非 tube 型の場合，$\mathfrak{p}^+$ のユークリッドな実形 $\mathfrak{n}^+$ は存在しないため，Ω, T_Ω を用いた表現の実現も存在しないことになる．しかし，D を用いた実現は可能なため，フォック実現 $\mathcal{F}_\lambda(\mathfrak{p}^+)$ も存在するはずである．そこでこの論文ではフォック実現 $\mathcal{F}_\lambda(\mathfrak{p}^+)$ を非 tube 型を含む一般のエルミート型リー環へ一般化した．さらに，この論文で (2) に当たる以下の積分公式を示した: $\lambda \in \mathcal{W}$, $a, u \in \mathfrak{p}^+$, $b, v \in \mathfrak{p}^-$ に対し，$|a|_\infty + |b|_\infty < 2$ ならば,

$$\frac{1}{\pi^n} \int_{\mathcal{X}^+_\lambda} e^{(a|\overline{z})} e^{(z|b)} \mathcal{I}_\lambda(u, \overline{z}) \mathcal{I}_\lambda(z, v) \mathcal{K}_{\lambda-\frac{n}{r}}(z, \overline{z}) d\nu_\lambda(z) = h(a,b)^{-\lambda} e^{(u|b^a)} e^{(a^b|v)} \mathcal{I}_\lambda(B(a,b)^{-1}u, v) \qquad (3)$$

が成り立つ．ここで a^b はジョルダン対上の準逆元, h は generic norm, $\mathcal{I}_\lambda$ は一般化ベッセル関数を $\mathfrak{p}^+ \times \mathfrak{p}^-$ 上に伸ばしたものである．これを用いると，振動子半群の類似を $\mathcal{F}_\lambda(\mathfrak{p}^+)$ 上で展開できる．

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mathfrak{p}^+}_\lambda := \Big\{ &(a, l, b) \in \mathfrak{p}^+ \times K^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{p}^- : \exists C > 0,\ \exists t \in (0,1)\ s.t. \\ &\forall (z, w) \in \mathfrak{p}^+ \times \mathfrak{p}^- \text{ に対し }, |e^{(a|w)} e^{(z|b)} \mathcal{I}_\lambda(lz, w)| < Ce^{t(|z|_1 + |w|_1)} \Big\}\end{aligned}$$

とおく．$(c, a, l, b) \in \mathbb{C}^\times \times \Gamma^{\mathfrak{p}^+}_\lambda$ に対し，積分変換 $\varpi_{\lambda,\mathfrak{p}^+}(c, a, l, b) : \mathcal{F}_\lambda(\mathfrak{p}^+) \to \mathcal{F}_\lambda(\mathfrak{p}^+)$ を

$$(\varpi_{\lambda,\mathfrak{p}^+}(c, a, l, b))f(z) := \frac{c}{\pi^n} \int_{\overline{\mathcal{X}_\lambda}} f(w) e^{(a|\overline{w})} e^{(z|b)} \mathcal{I}_\lambda(lz, \overline{w}) \mathcal{K}_{\lambda-\frac{n}{r}}(w, \overline{w}) d\nu_\lambda(w)$$

で定める．すると (3) より, 任意の $(c_j, a_j, l_j, b_j) \in \mathbb{C}^\times \times \Gamma^{\mathfrak{p}^+}_\lambda$ $(j = 1, 2)$ に対し, ある $(c_3, a_3, l_3, b_3) \in \mathbb{C}^\times \times \Gamma^{\mathfrak{p}^+}_\lambda$ が存在し，$\varpi_{\lambda,\mathfrak{p}^+}(c_2, a_2, l_2, b_2) \circ \varpi_{\lambda,\mathfrak{p}^+}(c_1, a_1, l_1, b_1) = \varpi_{\lambda,\mathfrak{p}^+}(c_3, a_3, l_3, b_3)$ が成り立つ．つまりこれは半群の作用になることが分かる．