平成 24 年度

修士論文題目

Stability of branching law of highest weight modules

(最高ウェイト加群の分岐則の安定性)

学生証番号　45-116014
フリガナ　キタガワ マサトシ
氏名　北川 宣稔

論文内容の要旨

修士論文題目

Stability of branching law of highest weight modules

(最高ウェイト加群の分岐則の安定性)

氏名　北川 宜稔

この修士論文の目的は、正則離散系列表現を正則な対称部分群に制限したときの分岐則を記述することである。小林俊行氏によって、正則離散系列表現を正則な対称部分群に制限したときに現れる重複度は一様に有界であることが示されている。一様に有界な重複度を持つ分岐則は Stability という性質を持つことが期待される。Stability とは分解に現れる表現のパラメーターを十分に大きくしたとき、その重複度がパラメーターのある種の同値類にしかよらないという性質である。佐藤文広氏によって、簡約代数群の既約表現の半単純な spherical pair に対する制限はこのような stability を持つことが示された。

この修士論文では、佐藤氏の結果をより一般の無重複空間の枠組みで捉え直し、正則離散系列表現の分規則に応用できる形で証明した。まずはこの定理を述べる。G を簡約代数群、X を G が無重複に作用するアフィン代数多様体とする。よく知られているように X が無重複な G-アフィン代数多様体であることと、G のボレル部分群 B が開かつ稠密な軌道 Bx を持つことは同値である。

Theorem 1. M を G の表現であって、X の正則関数環 $\mathbb{C}[X]$ が G の作用と整合性を持つように作用しているとする。ここで整合性を持つとは、任意の $g \in G$、$f \in \mathbb{C}[X]$ と $m \in M$ に対して、$g(fm) = (gf)(gm)$ が成り立つということである。さらに、M は $\mathbb{C}[X]$ 上有限生成だとし、以下の条件を満たすものとする。

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{C}[X]}(v) = 0 \ \textit{for any}\ v \in M \backslash \{0\}$$

このとき、ある $\lambda_0 \in \Lambda^+(\mathbb{C}[X])$ と簡約な部分群 $L \subset G_x$ が存在し、任意の $\lambda \in \Lambda^+(M)$ に対して、次の式が成り立つ。

$$m^G_M(\lambda + \lambda_0) = m^L_{M/\mathfrak{m}(x)M}(\lambda|_{B_x})$$

ここで、$\Lambda^+(V)$ とは V の既約分解に現れる既約表現の最高ウェイト全体の集合を表し、$m^G_V(\lambda)$ は λ を最高ウェイトとする既約表現の V における重複度を表している。また、$\mathfrak{m}(x)$ は $\mathbb{C}[X]$ における点 x に対応する極大イデアルある。L は抽象的に定義される部分群だが、具体的な場合、例えば離散系列表現の分岐則を考える場合では具体的に計算できる。

この定理を正則離散系列表現に適応すると次の定理を得る。

Theorem 2. G をエルミート型の連結単純リー群とし、H をその正則な連結対称部分群とする。$\mathcal{H}$ を G の正則離散系列表現とする。H に対応する G の対合を τ と書く。このとき、ある $\lambda_0 \in \Lambda^+(\mathbb{C}[\mathfrak{p}_+^{-\tau}])$ が存在し、任意の $\lambda \in \Lambda^+(\mathcal{H}^{\mathfrak{p}_+^{\tau}})$ に対して、次の式が成り立つ。

$$m_{\mathcal{H}}^{H}(\lambda + \lambda_0) = m_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}_+}}^{Z_{K\cap H}(\mathfrak{a})}(\lambda|_{Z_{T^\tau}(\mathfrak{a})})$$

ここで、$\Lambda^+(\cdot)$ は $K \cap H$ の表現として考えている。また、$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}^{-\tau}$ の極大可換部分空間で、T^τ は $K \cap H$ の極大トーラスである。

この定理の系として、$Z_{K\cap H}(\mathfrak{a})$ の $\mathcal{H}^{\mathfrak{p}_+}$ への作用が無重複であることと、$\mathcal{H}$ の H への制限が無重複であることが同値であることがわかる。$Z_{K\cap H}(\mathfrak{a})$ の $\mathcal{H}^{\mathfrak{p}_+}$ への作用が無重複ならば、$\mathcal{H}$ の H への制限が無重複であることは小林氏の可視的作用の理論からもわかる。つまり、可視的作用の理論で与えられる無重複性の十分条件が、この設定においては必要条件であるということが示される。

この定理の応用として、二つの正則な対称部分群であって、その複素化が $G_{\mathbb{C}}$ の内部自己同型で移りあうような場合に二つの分岐則の間に類似性が見られることが示される。例えば、このような部分群として $(G, H, H') = (\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}), \mathrm{U}(n), \mathrm{U}(p, q))$ というものが考えられる。この設定の下で次の定理が成り立つ。

Theorem 3. $\mathcal{H}$ を G の正則離散系列表現とする。このとき、$C_H(\mathcal{H}) = C_{H'}(\mathcal{H})$ となる。

ここで、$C_G(V)$ で V における G の既約表現の重複度の上限を表した。