平成２９年度

修士論文題目

反ド・ジッター空間における無限生成の強不連続性を有さないある不連続群の軌道の数え上げについて

学生証番号	45-166013
フリガナ	カンナカカズキ
氏名	甘中　一輝

論文内容の要旨

修士論文題目

反ド・ジッター空間における無限生成の強不連続性を有さないある不連続群の軌道の数え上げについて

氏名 甘中 一輝

主定理を説明する前に，まずその動機・背景となる小林俊行教授の理論の一部を簡単に説明する．

(G, H) を半単純対称対，X を対称空間 G/H，Γ を X の不連続群，X_Γ を局所対称空間 $\Gamma\backslash X$ とする．$\mathfrak{g}$ の Killing 形式から X に不定計量が，さらにそこから X のラプラシアン $\square_X = \mathrm{div}_X \circ \mathrm{grad}_X$ が定まる．X の計量はその G 不変性から X_Γ にも不定計量を誘導し，X_Γ のラプラシアン $\square_{X_\Gamma}$ が定まる．

次の定理は不定値計量を持つ局所対称空間のスペクトラムに関する最初の結果である．

定理 (Kassel-Kobayashi Adv. Math. 2016)

Γ が X に強不連続に作用し，X が離散スペクトラムを持つなら，X_Γ は離散スペクトラムを持つ．

ここでは簡単のために $\mathrm{rank}X = 1$ と仮定する．この場合離散スペクトラムはラプラシアンの L^2 固有関数に対応する固有値のことである．φ が X 上の $\square_X$ の固有関数なら，$\varphi^\Gamma(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi(\gamma x)$ は (形式的には)X_Γ 上の $\square_{X_\Gamma}$ の固有関数である，というのが基本的なアイデアであるが，次の困難を克服しなければならない．

鍵となる問題：φ^Γ は収束し，また L^2 関数となるか？さらに，$\varphi^\Gamma \neq 0$ となる φ は存在するか？

このために，[KK16] では φ の漸近挙動と, 不定値計量空間 X における不連続群の軌道の分布 (数え上げ) の両方の評価式を証明し，「鍵となる問題」の証明のステップとして用いられた．後者の数え上げの問題では「強不連続」という条件が本質的に用いられている．本論文では，不連続ではあるが強不連続ではない最も簡単な場合として，反 de Sitter 多様体 AdS^3 におけるある不連続群 $\Gamma_N^{j,\rho}$ について，その軌道の分布を計算しようとしており，その動機は $\Gamma_N^{j,\rho}\backslash\mathrm{AdS}^3$ の離散スペクトラムの存在について考察したいということである．より詳しく説明するため, 軌道の数え上げをどう定式化するか，また数え上げについてどのような条件があれば X_Γ の離散スペクトラムの存在が言えるかを述べる．

まず対称空間 X の極分解（一般化 Cartan 分解）$X = K\exp(\mathfrak{b}^+) \cdot x_0 (x_0 = eH, K$ は適切な G の極大コンパクト部分群) に対応する射影 $\nu : X \to \mathfrak{b}^+$ を考え，$x \in X$ に対して $\|\nu(x)\|$ を x の原点 x_0 からの“擬距離”とみなす (ここで $\mathfrak{b}$ に $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を制限することで内積を誘導し，そこから $\mathfrak{b}$ のノルム $\|\cdot\|$ を定めている)．X における不連続群 Γ の軌道の数え上げを半径 R の“擬球”において行い，その R に関する振る舞いを見ることで, 軌道の分布を調べる事が出来る．

定理 (Kassel-Kobayashi Adv. Math. 2016)

1. 「半径 R の擬球における軌道の数え上げ」が軌道によらない R のある指数関数で上から評価出来るなら，X の（十分正則な）離散スペクトラム φ に対してその Γ に関する平均化 φ^Γ は収束して L^2 となる．また, この時 X の（十分正則な）Flensted-Jensen 関数の Γ に関する平均化は 0 ではない．
2. Γ が X に強不連続に作用するなら，「半径 R の擬球における軌道の数え上げ」が軌道によらない R のある同じ指数関数で抑えられる．

ここで「強不連続性 (sharpness)」について少し述べておく．$Y = G/G'$ を簡約型等質空間，Γ を G の離散部分群として，Y における Γ の固有不連続性の判定法が [Ko89] をきっかけとして Benoist([Be96]) と小林([Ko96]) によって確立された．これは標語的に述べれば G の Cartan 射影による Γ, G' の像が「無限遠で離れる」というものである．そこでより強い条件として，2 つの像が「一次式的に離れる」事を課したものが強不

連続性であり，[Ko96] で言葉としては導入されていないが初めて現れた概念で，「強不連続 (sharp)」という言葉は [KK16] で定義された．Cartan 射影を用いるため，一般の等質空間の不連続群について強不連続性が定義されるわけではない事に注意する．

話を定理に戻して，それでは強不連続性を課さない場合に軌道の数え上げはどう振る舞うかという疑問が生じる．強不連続に作用しない不連続群の例は 2017 年に Guéritaud-Kassel によって構成された．

事実 ([GK17])

自然数 N が十分大きい時，AdS^3 の不連続群 $\Gamma_N^{j,\rho}$ は無限自由生成であり，強不連続性を有さない．

ここで，$\mathrm{AdS}^3 \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{diagSL}(2,\mathbb{R})$ と見ることで，AdS^3 を半単純対称空間と見なす．また，$\Gamma_N^{j,\rho}$ について少し説明しておくと，N は自然数，Γ_N を文字 $\gamma_k (k \geq N)$ 達で自由生成される群として，j, ρ は Γ_N から $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ へのとある群準同型であり，$\Gamma_N^{j,\rho} = \{(j(\gamma), \rho(\gamma)) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) : \gamma \in \Gamma_N\} \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ である．なお，$\Gamma_N^{j,\rho} \backslash \mathrm{AdS}^3$ は体積無限である．

問題：半径 R の擬球における $\Gamma_N^{j,\rho}$ の軌道の数え上げは軌道によらない R のある指数関数で抑えられるか？

ここで，X が非リーマンの場合にはそもそも各軌道の数え上げが半径に関して指数増大以下である事すら非自明であることに注意しておく．また AdS^3 には離散スペクトラムがあるから，この問が肯定的に解決されたとすると Kassel-Kobayashi の手法を用いる事で，$\Gamma_N^{j,\rho} \backslash \mathrm{AdS}^3$ の離散スペクトラムの存在が分かる．

本論文ではこの問題を完全には解決出来なかったが，軌道の数え上げに関して次のことが分かった．

主定理

N が十分大きい時，AdS^3 の半径 R の擬球における，$\Gamma_N^{j,\rho}$ による原点 $(1,0,0,0)$ の軌道の数え上げは指数増大，つまり R に関するある指数関数で上からも下からも評価する事が出来る．

上からの評価に関して手法を少し説明する．考察する $\Gamma = \Gamma_N^{j,\rho}$ が $\sigma_k (k \geq N)$ という元達で (無限) 自由生成される群である事を前提として, 大体 2 つの部分に分かれる．

- $\sigma \in \Gamma_N^{j,\rho}$ の最短表示を $\sigma = \sigma_{k_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{k_2}^{\varepsilon_2} \cdots \sigma_{k_l}^{\varepsilon_l}$ (但し $\varepsilon_i = \pm 1$) として， $\nu(\sigma) \ \geq \ \displaystyle\sum_{i=1}^{l} \log k_i$
- R を自然数として，$\#\{(k_1, \cdots, k_R) \in \mathbb{Z}^R : k_i \geq 1 \ , \ \displaystyle\sum_{i=1}^{R} \log k_i < R\}$ を R の指数関数で上から評価する．

一つ目は上半平面 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ の幾何に帰着することで証明する．二つ目はある図形の体積評価の問題に帰着し，体積を求めた後は Stirling の公式を用いることでその体積を R の指数関数で上から評価する．

最後に主定理から分かるある現象を説明する．ν による数え上げは指数増大である一方，先程の Guéritaud-Kassel による論文における計算を用いると $\{\gamma \in \Gamma : d(\mu(\gamma), \mu(H)) < R\}$($\mu$ は G の Cartan 射影) の数え上げが指数増大より大きい，具体的には loglog を取るとその主要項が $\frac{R}{2}$ であることが分かる．

ここで, 一般論として小林と Benoist による判定法から $\{\gamma \in \Gamma : d(\mu(\gamma), \mu(H)) < R\}$ が有限である事は G の離散部分群 Γ が X に固有不連続に作用することと同値であり，従って $d(\mu(\gamma), \mu(H))$ による数え上げは ν による数え上げの有限性の情報を把握している．それでは増大度の情報はどうだろうか？という疑問が生じる．もし Γ の作用が強不連続なら 2 つの数え上げは適切な意味で同値，例えば一方が多項式増大ならばもう一方は同じ次数の多項式程度の増大度であり，また，一方が指数増大ならもう一方が指数増大であると分かる．よってこの時は数え上げの増大度の情報を把握していると言える．しかし強不連続という仮定を外した上の例の場合では，増大度の情報までは把握していないということが分かる．