

里見 貴志 (SATOMI Takashi)

数理科学専攻 修士課程 2 年

研究概要

私は Cayley グラフの expander 性評価について研究している. k -正則無向有限グラフ G の隣接行列の固有値はすべて $[-k, k]$ 内に収まることが知られている. この固有値のうち二番目に大きいものを λ_2 とし, $\epsilon \leq 1 - \lambda_2/k$ とするとき, G は (one-sided) ϵ -expander グラフであるという. この ϵ の値が大きいとき, G は expander 性が高いという.

expander 性が高いことは「グラフの中でどのような頂点の集合をとってきても, その集合は外部と辺で十分つながっている」ことを表す. これは以下のように定式化される. k -正則グラフ $G = (V, E)$ が ϵ -expander であるとする. $A \subset V$ に対し A の頂点と $V \setminus A$ の頂点を結ぶ辺全体を ∂A とする. $A \subset V$ が $\#A \leq V/2$ をみたすように動くときの $(\#\partial A)/(\#A)$ の最小値を $h(G)$ としたとき, $\epsilon k/2 \leq h(G) \leq \sqrt{2\epsilon k}$ となる.

Tao は Balog-Szemerédi-Gowers の定理を拡張し (重み付き Balog-Szemerédi-Gowers の定理), それを用いることで Cayley グラフの expander 性を調べる方法を確立した.

重み付き Balog-Szemerédi-Gowers の定理とは「群上の正值関数 f が $\|f\|_{l^1} = 1$, $\|f * f\|_{l^2} = K^{-1}\|f\|_{l^2}$ をみたすとき, ある定数 n が存在し, f のノルムに対し位数が大きすぎず小さすぎない $O(K^n)$ -approximate group が存在する (ここで, $f * f$ は二つの f の群上の畳み込み)」という定理である. 元々の Balog-Szemerédi-Gowers の定理は, この定理の f を集合の特性関数に限った場合である. そして, この定理の n の値が小さいほど Cayley グラフの expander 性の評価を強くできる.

Tao は重み付き Balog-Szemerédi-Gowers の定理を以下のように示した. 仮定をみたす f が存在したとすると, ある集合の特性関数 g で, $\|g * g\|_{l^2} \geq O(K^{-6})\|g\|_{l^2}$ となるものが存在する. よって, f と K を g と $O(K^6)$ にとりかえた Balog-Szemerédi-Gowers の定理に帰着できる. この証明法では n の値がとて大きくなるので, Cayley グラフの expander 性の評価が粗くなってしまふ. そこで, 私は元々の Balog-Szemerédi-Gowers の定理の n の値を小さくする方法を見つけた. Balog-Szemerédi-Gowers の定理の証明では, 「任意の二部グラフ (A, B, E) に対し, ある集合 $A' \subset$

$A, B' \subset B$ が存在し, 任意の $A' \times B'$ の元に対しそれらを結ぶ長さ 3 の経路の個数が十分多く存在する」ということが使われている. 私は長さ 3 以上の経路の場合でもこの補題が成り立つことを示し, さらに A, B が測度空間の場合に一般化した.

また, 私はこの補題を使わずに重み付き Balog-Szemerédi-Gowers の定理を直接証明することで, 定理の評価を改良した. さらに, G がユニモジュラーな局所コンパクト群の場合に同様の定理が成り立つことを示した. これにより, Bourgain-Gamburd や Tao の Cayley グラフの expander 性を調べる定理の評価をより強めることができた.

学位論文

(修士論文) 算術的組み合わせ論による等質空間上のたたみ込みのスペクトル評価

口頭発表

1. Selberg's expander construction (after Tao) について, Workshop on “Actions of Reductive Groups and Global Analysis”, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2017 年 8 月.
2. (1) Freiman's product theorem の紹介, (2) Balog-Szemerédi-Gowers の定理の評価の改良と一般の不変測度への拡張, Workshop on “Actions of Reductive Groups and Global Analysis”, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2018 年 8 月.

FMSP の活動への参加

1. Workshop on “Actions of Reductive Groups and Global Analysis”, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2018 年 8 月. FMSP から旅費の補助を得て参加し, 講演した.
2. K-THEORY AND THE DIRAC OPERATOR, FMSP Lectures, 東京大学大学院数理科学研究科, 2018 年 10 月. Paul Baum 氏による講義に出席し, K-理論について理解を深めた.
3. 産業界からの課題解決のためのスタディグループ, 東京大学大学院数理科学研究科, 2018 年 12 月. ダンス評価に関する数理的アプローチの考察について, 他の人と議論を交えながら発表した.