

里見 貴志 (SATOMI Takashi)

数理科学専攻 修士課程1年

研究概要

expander 性が高いケイリーグラフの構成方法について勉強している。有限無向グラフ G の隣接行列は対称行列なので、固有値は必ず実数になる。特に、グラフ G が k -正則ならば固有値の絶対値は k 以下になる。このとき、2 番目に大きい固有値を λ とし、 $\epsilon = 1 - \lambda/k$ とすると、 G は (one-sided) ϵ -expander であるという。この ϵ の値が大きいケイリーグラフを構成する方法を勉強している。

まず、Margulis' expander construction について勉強した。Kazhdan's property (T) をみたす群 G と G の正規部分群 H に対し、 G/H 上のケイリーグラフが expander graph になる。このことを使って、 $SL(d, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (ここで、 d は 3 以上の整数) のケイリーグラフが expander graph なることを勉強した。

また、Selberg's expander construction についても勉強した。 $SL(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ のラプラス作用素のスペクトルギャップが存在することをを使って (\mathbb{H} は上半平面)、 $SL(2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ のケイリーグラフが作れることを勉強した。さらに、Selberg's expander construction を拡張することで、リーマン多様体 M に等長に作用する群 G とその正規部分群 H に対し、 $H \backslash M$ のラプラス作用素のスペクトルギャップが存在するならば G/H のケイリーグラフが構成できることを証明した。

それに関連して、 \mathbb{H} 上のラプラス作用素のスペクトルギャップが存在することを quasirandomness と熱核を評価することで証明する方法について勉強した。この証明は、後述する Bourgain-Gamburd expansion machine と類似したものになっている。expander 性をグラフラプラシアン のスペクトルギャップと考えることができ、リーマン多様体上のブラウン運動とグラフ上のランダムウォークを対応させることでこの 2 つが類似していることを理解した。

また、Bourgain-Gamburd expansion machine についても勉強した。これは G が quasirandomness, product theorem, nonconcentration estimate の 3 条件をみたすときに expander graph を構成することができるという定理である。quasirandomness とは、任意の G の非自明なユニタリ規約表現の次元が大きいことを表している。product theorem とは、 G の部分集合 A に対し A^2 の

元の個数が A の元の個数とあまり変わらないとき A は G の部分群の剰余類とほとんど一致することをいう定理である。nonconcentration estimate とは、グラフのあるノードからランダムウォークを行い、ある時間経過したときにどの部分群にもとどまる確率が低いことを表している。Bourgain-Gamburd expansion machine についてよく理解するために、これらの条件についても勉強した。quasirandomness については、 $SL(2, \mathbb{F}_p)$ の非自明なユニタリ規約表現は、次元が $(p-1)/2$ 以上になることについて勉強した。他の条件についても、勉強する予定である。

口頭発表

1. Selberg's expander construction (after Tao) について、Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2017 年 8 月。

FMSP の活動への参加

1. 環境数理スタディグループ, 2018 年 2 月 28 日~3 月 7 日, 東京大学大学院数理科学研究科

「リチャードソンの 4/3 法則と大気・海洋のセシウム拡散」について取り組んだ。

リチャードソンの 4/3 法則に従っている場合の偏微分方程式を解き、その解の挙動を調べた。その結果、従来の経験則から考えられていた挙動と大きく異なることが分かったので、実データを提供してもらい、データフィッティングを行った。すると、リチャードソンの 4/3 法則から導いた挙動のほうがよく近似していることを発見し、このことについて発表した。

このスタディグループを通して、数学科以外の先生を含めた活発な議論の中で数学科との考え方の相違に気づき、視野を広げることができた。フィッティングの知識も深めることができた。