

森田 陽介 (MORITA Yosuke)

学振 DC1

数理科学専攻 博士課程 3 年

研究概要

等質空間 G/H の開集合を G の作用で貼り合わせて得られる空間 M のことを, G/H を局所的なモデルとする多様体という. 例えば G の離散部分群 Γ が G/H に固有かつ自由に作用するとき (または同値なことであるが, 射影 $G/H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$ が主 Γ -束になるとき), $\Gamma \backslash G/H$ は G/H を局所的なモデルとする多様体になる. このとき $\Gamma \backslash G/H$ を Clifford–Klein 形, Γ を G/H の不連続群という. M が G/H を局所的なモデルとする多様体のとき, G/H 上の G -不変微分形式を各開集合に制限して G の元の左移動で貼り合わせることで $\eta : \Omega(G/H)^G \rightarrow \Omega(M)$ という準同型が定まる. これはコホモロジー間の準同型 $\eta : H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(M; \mathbb{R})$ を誘導する. この準同型 η から, 与えられた等質空間 G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体が存在するための障害が幾つか得られることが知られている.

以前の研究で, 簡約型等質空間 G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体が存在するためには, Lie 環の相対コホモロジーの間の準同型 $i : H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(\mathfrak{g}, K_H; \mathbb{R})$ が単射でなければならないことが分かっていた (論文 [1]). 本年度の研究では, この準同型 i が単射になるための簡単な必要十分条件を不変式論の言葉で与えた. 証明には, Lie 環の相対コホモロジー $H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R})$ が Weil 代数の転入写像から定まる pure Sullivan 代数のコホモロジー $H^\bullet(\Lambda P_{\mathfrak{g}^*} \otimes (S\tilde{\mathfrak{h}}^*)^H, -\delta_{\tau_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}})$ に同型である, という H. Cartan, C. Chevalley, J.-L. Koszul, A. Weil らの結果を用いる. 応用として, 小林俊行が 1989 年に述べた「rank $G - \text{rank } K < \text{rank } H - \text{rank } K_H$ を満たす簡約型等質空間 G/H はコンパクトな Clifford–Klein 形を持たない」という予想の証明が得られた.

発表論文

1. Y. Morita, A topological necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms, *J. Differential Geom.* **100** (2015), 533–545.
2. Y. Morita, Semisimple symmetric spaces without compact manifolds locally modelled thereon, *Proc. Japan Acad. Ser. A*

Math. Sci. **91** (2015), 29–33.

3. Y. Morita, Homogeneous spaces of nonreductive type that do not model any compact manifold, arXiv:1508.04862, to appear in *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*
4. Y. Morita, A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms, arXiv:1601.07359, to appear in *Selecta Math. (N.S.)*

学位論文

(博士論文) A cohomological study of the existence problem of compact Clifford–Klein forms.

口頭発表

1. 簡約型等質空間がコンパクト商を持つための位相的制約, 2013 年度表現論シンポジウム, マホロバマイズ三浦, 2013 年 11 月.
2. 等質空間がコンパクト商を持つための位相的制約, 表現論と調和解析の新たな進展, 京都大学, 2014 年 6 月.
3. A necessary condition for the existence of compact manifolds locally modelled on homogeneous spaces, 第 61 回幾何学シンポジウム, 名城大学, 2014 年 8 月.
4. Y. Benoist “Actions propres sur les espaces homogènes réductifs” Chapitre 4 の解説, リー群の表現論と群作用についての研究会, 玉原国際セミナーハウス, 2014 年 8 月.
5. A necessary condition for the existence of compact manifolds locally modelled on homogeneous spaces, Rigidity School, Tokyo 2014, 東京大学, 2014 年 11 月.
6. 等質空間を局所モデルとするコンパクト多様体が存在するための障害, 広島大学トポロジー・幾何セミナー, 広島大学, 2014 年 12 月.
7. A necessary condition for the existence of compact manifolds locally modelled on homogeneous spaces, 2015 East Asian Core Doctorial Forum on Mathematics, National Taiwan University, Taiwan, 2015 年 1 月.

8. Volume forms and compact Clifford–Klein forms, ワークショップ「不連続群の変形とその周辺」, 名古屋大学, 2015 年 2 月.
 9. 等質空間がコンパクト商を持つための位相的制約, 日本数学会 2015 年度年会 (函数解析学分会, 一般講演), 明治大学, 2015 年 3 月.
 10. Cohomological obstructions to the existence of compact Clifford–Klein forms, Mathematical Symposium ENS Lyon–Todai, École Normale Supérieure de Lyon (Poster Session), 2016 年 6 月.
 11. (1) Proper actions on corank-one reductive homogeneous spaces (after Kassel), (2) A new cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms, リー群の群作用と大域解析セミナー, 玉原国際セミナーハウス, 2015 年 8 月.
 12. Homogeneous spaces locally modelling no compact manifold, 第 15 回関東若手幾何セミナー, 慶應義塾大学, 2015 年 10 月.
 13. コンパクト Clifford–Klein 形の存在問題について, 2015 年度表現論シンポジウム, 公共の宿おとり荘, 2015 年 11 月.
 14. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms, Berkeley–Tokyo Winter School “Geometry, Topology and Representation Theory” (Student Session), University of California, Berkeley, USA, 2016 年 2 月.
 15. 等質空間を局所モデルとするコンパクト多様体が存在するための障害, 日本数学会 2016 年度年会 (幾何学分会, 一般講演), 筑波大学, 2016 年 3 月.
 16. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms, Geometric Analysis on Discrete Groups, 京都大学, 2016 年 5 月.
 17. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms, Geometry and Topology Seminar, University of Luxembourg, Luxembourg, 2016 年 6 月.
 18. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms, Rigidity School, Nagoya 2016, 名古屋大学, 2016 年 7 月.
 19. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms, 第 63 回幾何学シンポジウム, 岡山大学, 2016 年 8 月.
 20. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms, Group Actions and Dynamics Seminar, Yale University, USA, 2016 年 9 月.
 21. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms, International Conference for the 70th Anniversary of Korean Mathematical Society (Session: Geometric Group Theory and Dynamics of Group Actions), Seoul National University, South Korea, 2016 年 10 月.
 22. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms, 2016 年度表現論シンポジウム, オキナワグランメールリゾート, 2016 年 11 月.
- FMSP の活動への参加**
- FMSP レクチャーズ:
1. Aniceto Murillo et al, Rational homotopy theory: Quillen and Sullivan approach, 東京大学数理科学研究科, 2013 年 4 月.
- 有理ホモトピー論の基礎知識を学んだ。ここで学んだ Sullivan 流の有理ホモトピー論の考え方を, のちに研究で用いた (上記研究概要, 博士論文 3 章を参照).
- FMSP 長期海外渡航:
- 海外渡航先の研究機関名・国名・受入教員名
イエール大学・アメリカ合衆国 (8 月 31 日–11 月 3 日, 受入教員: Hee Oh 教授)
 - 参加した研究集会・セミナー等
イエール大学内の定例セミナー「Group Actions and Dynamics Seminar」「Algebra and Lie Groups」に参加した.

- 研究集会・セミナー等での講演
Group Actions and Dynamics Seminar, イェール大学, 9月12日.
 - 講演タイトル: A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms.
 - 講演アブストラクト: A Clifford–Klein form is a quotient of a homogeneous space G/H by a discrete subgroup of G acting properly and freely on G/H . It naturally admits a structure of a manifold locally modeled on G/H . Comparing relative Lie algebra cohomology and de Rham cohomology, we give a new obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms of a given homogeneous space. As a corollary, we see that every complete pseudo-Riemannian manifold of signature (p, q) with positive constant sectional curvature is noncompact if $p, q > 0, q$: odd.
- 海外渡航によって得られた成果
受入教員の Hee Oh 教授と, 等質空間上の固有な作用について議論した. また, 等質力学系に関する Oh 教授の近年の研究について解説を受けた. Ilya Smilga 氏と, 等質空間上の固有な作用について議論した. 力学系的なアプローチの理解を深めることができた. Yair Minsky 教授から, 幾何学的群論について学んだ. Gregory Margulis 教授から, 定量的 Oppenheim 予想について学んだ.

受賞

1. 数理科学研究科長賞 (2013 年度).