２００８年冬学期
数学II　演習問題 (文系）第９回　の略解

担当：　小林俊行教授　　ＴＡ：及川 一誠

問 1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

(2) $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 16 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

問 2. $\sigma\tau, \tau\sigma$ を求めると以下のようになり，実際に非可換であることがわかる．

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

問 3. (1) $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) σ, τ の符号は共に $+1$ である．

問 4. (1) $\{1,2,3,4\}$ の順列を求めればよいので，$4! = 24$ 通り．

(2) ここでは S_n^+, S_n^- をそれぞれ n 個の文字の置換で，符号が $+1$, -1 のものを表すとする．S_n^+, S_n^- から S_{n+1}^+, S_{n+1}^- を順々に作っていって数える．

2 個の文字の置換は $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の 2 通りで，符号はそれぞれ $+1, -1$ である．

3 個の文字の置換は次のように，2 個の文字の置換に右側から 3 を加えて，ずらしていって数える．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{符号は} +1, -1, +1,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{符号は} -1, +1, -1.$$

こうして作り出される置換はすべて異なっていることに注意する．符号については，元の置換の最後尾に付け加えても符号は変わらないことと，加える位置を一つずらすと符号が反転することからわかる．したがって，S_3^+ は 3 通り, S_3^- は 3 通りとなる．

4 個の場合も同様にして数える．まず S_4^+ の方を数える．S_3^+(3 通り) から，$+1$ の置換は 2 つずつ得られる．よって，$3 \cdot 2 = 6$ 通り．S_3^-(3 通り) の方からも，同じく 6 通り得られる．したがって，S_4^+ は 12 通りとなることがわかる．S_4^- の方も同様に数えていけば，$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ 通りとなる．

問 5. (1) $A^{(11)} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(12)} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(13)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$;

$A^{(21)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(22)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$;

$A^{(31)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^{(32)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $A^{(33)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$;

行列式はそれぞれ, $-3, -6, -3$; $-6, -12, -6$; $-3, -6, -3$.

(2) $$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

(3) $$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$