# ２００８年冬学期
# 数学II　演習問題 (文系） 第７回

担当：　小林俊行教授　　ＴＡ： 及川 一誠

**復習**

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して，内積 $(\vec{a}, \vec{b})$ と 外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は次のように定義される.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

**外積の性質**

1. $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ ($\vec{a}$と$\vec{b}$の張る平行四辺形の面積)
2. $\vec{a} \times \vec{b}$ は $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する.
3. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ は右手系をなす.

**問 1.** $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

**問 2.** $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ とするとき,

(1) 内積 $(\vec{u}, \vec{v})$，外積 $\vec{u} \times \vec{v}$ を計算せよ.

(2) $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\alpha$ とするとき $\cos\alpha, \sin\alpha$ を求めよ.

(3) $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の張る平行四辺形の面積を求めよ.

**問 3.** 3 次元ベクトル $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ に関して以下の等式を証明せよ.

(1) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

(2) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

(3) $(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v} \times \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w} \times \vec{u}, \vec{v})$

**問 4.** $\vec{u}, \vec{v}$ を $\vec{0}$ でない 3 次元ベクトルとするとき，以下の (1), (2) を証明せよ．

(1) (内積) $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ となる必要十分条件は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が直交することである．

(2) (外積) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ となる必要十分条件は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が平行，すなわち，$\vec{u} = t\vec{v}$ となる 0 でない実数 $t$ が存在することである．

**問 5.** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ を $\vec{0}$ でない 3 次元ベクトルとし，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行でないものとする．

(1) $\vec{w}$ が $\vec{u}, \vec{v}$ いずれにも直交するための条件を ($w_1, w_2, w_3$ に関する方程式として) 書き表せ．

(2) (1) で求めた連立一次方程式を解くことによって，$\vec{w}$ は

$$\vec{w} = t(\vec{u} \times \vec{v}) \quad (t \text{ は実数})$$

と表せることを示せ．

**問 6.** $n$ 次元ベクトル $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ に対して，その内積 $(\vec{u}, \vec{v})$ とノルム $|\vec{u}|$ を

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}) &:= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \\ |\vec{u}| &:= (u, u)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \end{aligned}$$

と定義するとき，次の等式を証明せよ．

(1) $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2)$

(2) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2)$

**問 7.** 問 6 の (2) で述べた等式は中線定理と呼ばれる．$n = 2$ の場合に，これが何を意味するか，平面幾何の立場から考察せよ．