２００８年冬学期
数学II　演習問題 (文系）第７回　の略解

担当：　小林俊行教授　　ＴＡ：及川 一誠

問 1. 外積の定義に従って計算する.

問 2. (1) $(\vec{u},\vec{v})=32,\quad \vec{u}\times\vec{v}=(-3,6,-3)$.

(2) $\cos\alpha=\dfrac{(\vec{u},\vec{v})}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{32}{\sqrt{14}\sqrt{77}}=\dfrac{16\sqrt{22}}{77},\quad \sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{33}}{77}$.

(3) $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha=3\sqrt{6}$.

問 3. 以下，問 3 から問 5 まで $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ とする.

(1) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}v_2u_3-v_3u_2\\v_3u_1-v_1u_3\\v_1u_2-v_2u_1\end{pmatrix}=-\vec{v}\times\vec{u}.$

(2) (1) において $\vec{v}$ として $\vec{u}$ をとれば，$\vec{u}\times\vec{u}=-\vec{u}\times\vec{u}\iff 2(\vec{u}\times\vec{u})=\vec{0}$.

(3) 3 つとも計算すると $u_1v_2w_3+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2-u_1v_3w_2-u_2v_1w_3-u_3v_2w_1$ に等しいことが分かる.

問 4. (1) $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角を α とするとき，$\cos\alpha=\dfrac{(\vec{u},\vec{v})}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ が成り立つ．したがって，$\cos\alpha=0$ と $(\vec{u},\vec{v})=0$ とは同値である.

(2) $\vec{u}=t\vec{v}$ $(t\neq 0)$ ならば，$\vec{u}\times\vec{v}=t(\vec{v}\times\vec{v})=\vec{0}$ である．逆に，$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ とする．$\vec{u}\neq\vec{0}$ なので，u_1,u_2,u_3 のうち少なくとも 1 つは 0 ではない．それを $u_1\neq 0$ としても一般性は失われない．$u_3v_1-u_1v_3=u_1v_2-u_2v_1=0$ であることを用いると，

$$u_1\vec{v}=\begin{pmatrix}u_1v_1\\u_1v_2\\u_1v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1v_1\\u_2v_1\\u_3v_1\end{pmatrix}=v_1\vec{u}.$$

$\vec{v}\neq\vec{0}$ から $v_1\neq 0$ が分かるので，t として $v_1/u_1(\neq 0)$ がとれる.

問 5. (1) 問 4 の (1) より, $(\vec{u},\vec{w})=(\vec{v},\vec{w})=0$ を満たせばよい．したがって，条件は次のようになる.

$$\begin{cases}u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 = 0\\ v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0\end{cases}$$

(2) $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行でないので，問 4 の (2) より，$\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$ である．$\vec{u}\times\vec{v}$ の 3 成分のうち少なくとも一つは 0 でないが，一般性を失うことなく $u_1v_2-u_2v_1\neq 0$ としてよい．(1) の条件式を次のように行列形に書き直す．

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = -w_3\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$u_1v_2-u_2v_1\neq 0$ のとき，この w_1, w_2 に関する連立一次方程式は唯一つの解をもつ．これを解くと，

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{w_3}{u_1v_2-u_2v_1}\begin{pmatrix} u_2v_3-u_3v_2 \\ u_3v_1-u_1v_3 \end{pmatrix}$$

となる．$t=w_3/(u_1v_2-u_2v_1)$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(u_2v_3-u_3v_2) \\ t(u_3v_1-u_1v_3) \\ w_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} u_2v_3-u_3v_2 \\ u_3v_1-u_1v_3 \\ u_1v_2-u_2v_1 \end{pmatrix} = t(\vec{u}\times\vec{v}).$$

問 6. (1) 定義に従って計算すればよい．

$$\begin{aligned} |\vec{u}-\vec{v}|^2 &= (u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2 \\ &= (u_1^2+\cdots+u_n^2)+(v_1^2+\cdots+v_n^2)-2(u_1v_1+\cdots+u_nv_n) \\ &= |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2(\vec{u},\vec{v}). \end{aligned}$$

(2) (1) より，次が成り立つ．

$$2(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2,$$
$$2(\vec{u},-\vec{v}) = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-|\vec{u}+\vec{v}|^2.$$

この 2 式を足し合わせればよい．

問 7. 点 M から $\vec{u},\vec{v},-\vec{u}$ だけ進んだところをそれぞれ点 A, B, C とする (下図)．$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が平行でない場合，ABC は三角形を成し，点 M は辺 AC の中点，BM は中線になる．問 6 の (2) で，$|\vec{u}|=\mathrm{AM}$, $|\vec{v}|=\mathrm{BM}$, $|\vec{u}+\vec{v}|=$BC, $|\vec{u}-\vec{v}|=$AB と当てはめると

$$\mathrm{BC}^2+\mathrm{AB}^2 = 2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

となり，三角形の各辺の長さと中線の長さとの関係が分かる．