２００８年冬学期
数学II　中間テストの略解

担当：　小林俊行教授　　ＴＡ：春田　力

１問１５点、１０５点満点です。

全体を通して：１，２，４，６番については、非常に良い出来でした。３，７番は少してこずったようです。採点を少し厳しくしすぎてしまった感があるので、点数が悪くても気にしないでください。（今回の試験の結果が成績に悪影響を及ぼすことはないそうです。）

問 1. とりあえず何か書いてあれば 15 点

お詫び：質問を書いてくれた方が多数いらっしゃったのですが、私の力不足で、うまく答えることができませんでした。すみません。

問 2.

$$
\begin{aligned}
A\,{}^t\!A &= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & ax+by+cz \\ ax+by+cz & x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}, \\
{}^t\!A\,A &= \begin{pmatrix} a^2+x^2 & ab+xy & ac+xy \\ ab+xy & b^2+y^2 & bc+yz \\ ac+xz & bc+yz & c^2+z^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

採点基準, $A\,{}^t\!A$ が７点、 ${}^t\!A\,A$ が８点。

問 3. まず、$(AB)C$ と $A(BC)$ の型が一致することを示す。
A が m 行 n 列、B が n 行 l 列、C が l 行 k 列なので、AB は m 行 l 列の行列になり、$(AB)C$ は m 行 k 列の行列になる。同様に、BC は n 行 k 列、$A(BC)$ は m 行 k 列の行列になり、$(AB)C$ と $A(BC)$ の型は一致する。
次に、任意の $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq k$ に対して、$(AB)C$ の (i,j) 成分と $A(BC)$ の (i,j) 成分が等しいことを示す。

$$
\begin{aligned}
((AB)C \text{ の } (i,j) \text{ 成分}) &= \sum_{\alpha=1}^{l}\left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta}b_{\beta\alpha}\right)c_{\alpha j} \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta}\sum_{\alpha=1}^{l}(b_{\beta\alpha}c_{\alpha j}) \\
&= (A(BC) \text{ の } (i,j) \text{ 成分})
\end{aligned}
$$

以上より、$(AB)C = A(BC)$.

採点基準：「行列の型が一致すること」を示して３点。「対応する成分が等しいこと」を示して１２点。

今回、「行列の型が一致すること」を採点基準に入れました。少し厳しかったと思いますが、「行列の計算をするときには、型に注意を払う必要がある」ということを頭の片隅にでも置いておいてほしい、という意味でご理解ください。

また、「「対応する成分が等しいこと」をどう論証すればいいかわからない」という声が多数ありました.
以下の２点が大事かと思います。

(1) 示すべきこと

$(AB)C$ と $A(BC)$ の対応する成分が等しいことをしめすには....

- $(AB)C$ と $A(BC)$ の $(1,1)$ 成分が等しい
- $(AB)C$ と $A(BC)$ の $(1,2)$ 成分が等しい
- $\cdots$
- $\cdots$
- $(AB)C$ と $A(BC)$ の (m,k) 成分が等しい

という mk 個の主張を示せばよい。

(2) では、どうやって示せばよいか?

- <u>任意の</u>$1 \le i \le m, 1 \le j \le k$ に対して、$(AB)C$ の (i,j) 成分と $A(BC)$ の (i,j) 成分が等しい

ことを示せば OK です。
この主張は <u>実は上の mk 個の主張をまとめて書いたものである</u> というのがポイントです。

問 4.

$$y_i = \sum_{j=1}^{4} a^{(i-1)(j-1)} x_j$$

より

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + ax_2 + a^2x_3 + a^3x_4 \\ x_1 + a^2x_2 + a^4x_3 + a^6x_4 \\ x_1 + a^3x_2 + a^6x_3 + a^9x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^4 & a^6 \\ 1 & a^3 & a^6 & a^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

採点基準：答えが合っていれば１５点

指数の計算でミスをした人がいました。$a^{(i-1)(j-1)} \neq a^{i-1}a^{j-1}$ に注意。

問 5. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&*\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&*&*\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&*&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&*\\0&1&*\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

ここで、$*$ は任意の実数。

採点基準：ゼロ行列が１点、ほかの行列は２点。ただし $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&*\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ のように、同じ行基本変形に関する標準形を持つものが重複している場合には、点を付けていません。

問 6. (1) $a \neq \pm 1$ のとき

$a+1, a-1, a^2-1$ はいずれも 0 でないので、

$$\begin{pmatrix}a+1&0&1\\0&a-1&0\\0&0&a^2-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{a+1}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$a=1$ のとき $\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$a=-1$ のとき $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

採点基準：各パターンの標準形１つにつき５点。

問 7. (1) $(*)$ の係数行列は $A = \begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$,

拡大係数行列は $\tilde{A} = \begin{pmatrix}a&1&1&b\\1&a&1&b\\1&1&a&b\end{pmatrix}$,

となる。

$(*)$ に解が存在するための必要十分条件は rank$A$=rank$\tilde{A}$。

ここで、$\tilde{A}$ に行基本変形を施すと、

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}a&1&1&b\\1&a&1&b\\1&1&a&b\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}a&1&1&b\\1-a&a-1&0&0\\1-a&0&a-1&0\end{pmatrix}$$

と変形できる。

(i) $a=1$ のとき

rank$A$=rank$\tilde{A}$=1

(ii) $a \neq 1$ のとき

$a-1 \neq 0$ なので、$\tilde{A}$ を行基本変形によって以下のように変形できる。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 & b \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)-(I) $a \neq -2$ のとき

rank$A$=rank$\tilde{A}$=3

(ii)-(II) $a = -2$ のとき

このとき rank$A$=2。一方、$b = 0$ のとき rank$\tilde{A}$=2、$b \neq 0$ のとき rank$\tilde{A}$=3。

以上から、($*$) に解が存在するための必要十分条件は $a = -2, b = 0$ または、$a \neq -2$。

(2) （解の自由度）= (変数の数)$-$rank$A$　より、

解の自由度は、 $a = 1$ のとき 2, $a \neq -2$ のとき 0, $a = -2, b = 0$ のとき 1 となる。

採点基準：(1)：12 点 (2)：3 点

採点が厳しすぎた感があります。あまり点数を気にしないでください。

また、せっかく考え方があっているのに、計算ミスのために答えがあさっての方向に行ってしまっている方がいました。途中を省略している方に多く見受けられます。行基本変形は「途中を書くのが面倒」→ 「省略して一気に」→ 「計算ミス」という連鎖が起きやすい操作です。特に、次のようなミスには気をつけましょう。

一気にやりすぎた例：

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

引いてるつもりが途中から足していた例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a-a^2 \end{pmatrix}$$