２００８年冬学期
数学II　演習問題 (文系） 第５回　の略解

担当：　小林俊行教授　　ＴＡ：及川 一誠

問 1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1+2u \\ -3u \end{pmatrix} \quad (t \text{ は実数})$$

問 2. $A, \tilde{A}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b \end{pmatrix}$$

とする．$\tilde{A}$ を次のように行基本変形する．

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b \end{pmatrix} \begin{array}{l} (-1)\ \ (-1) \\ + \\ \qquad + \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a = 1$ のときは $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 1$ となり，解が存在する．解の自由度は 2 である．

$a \neq 1$ の場合は，さらに次のように行基本変形を施す．

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \div (1-a) \\ \mid \div (1-a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +\ \ + \\ 1 \\ \qquad 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 & b \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a = -2, b = 0$ ならば $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 2$ となるので解は存在し，自由度は 1 である．$a = -2, b \neq 0$ ならば $\operatorname{rank} A = 2 < \operatorname{rank} \tilde{A} = 3$ となり，解は存在しない．$a \neq -2, 1$ の場合は $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 3$ なので，解は一意に存在する．まとめると下の表の通りになる．

	$\operatorname{rank} A$	$\operatorname{rank} \tilde{A}$	解の自由度
$a = 1$, b:任意	1	1	2
$a = -2$, $b = 0$	2	2	1
$a = -2$, $b \neq 0$	2	3	(存在しない)
$a \neq -2, 1$, b:任意	3	3	0

問 3. $A, \tilde{A}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ -a & a & a^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & a^2 & a & a \\ -a & a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．$\tilde{A}$ を次のように行基本変形する．

$$\begin{aligned}
\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & a^2 & a & a \\ -a & a & a^2 & 1 \end{pmatrix}
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & a^2 & a & a \\ -a & a & a^2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & a^2 & a & -1+a+a^2 \\ 0 & a & a^2 & 1+a-a^3 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-a^2 & -1+a+a^2-a^3 \\ 0 & 0 & -(a-a^2) & 1+a-a^2-a^3 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a(1-a) & -1+a+a^2-a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 2a(1-a^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

a について場合分けして，$\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} \tilde{A}$ を調べていくと以下のようになる．

	$\operatorname{rank} A$	$\operatorname{rank} \tilde{A}$	解の自由度
$a = 0$	2	3	(存在しない)
$a = 1$	2	2	1
$a = -1$	3	3	0
$a \neq 0, \pm 1$	3	4	(存在しない)

したがって，解が存在するための必要十分条件は $a = \pm 1$ である．解が唯一つ存在するための必要十分条件は $a = -1$ となる．