２００８年冬学期
数学II　演習問題 (文系） 第３回　の略解

担当：　小林俊行教授　　ＴＡ：春田　力

問 1. $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$N_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $N_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$N_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

問 2. 実際に計算をして確かめてください。

問 3. $\lambda \neq 0$ なので、λ^{-1} が存在します。
そこで、例えば
(1) i 行を λ 倍する。
(2) i 行を j 行に加える。
(3) i 行を λ^{-1} 倍する。
ことで i 行の λ 倍を j 行に加えるという操作が得られます。

問 4. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ とおく。

I) $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の時.

A は行基本変形によって、以下の形に変形できます。

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \end{pmatrix}$$

ここで、

$$a'_{22} \neq 0 \text{ なら } \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

$$a'_{22} = 0, a'_{23} \neq 0 \text{ なら } \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a'_{22} = 0, a'_{23} = 0 \text{ なら } \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形に行基本変形で変形できます。

II) $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の時.

A は行基本変形によって、以下の形に変形できます。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a'_{13} \\ 0 & 0 & a'_{23} \end{pmatrix}$$

ここで、

$$a'_{23} \neq 0 \text{ なら} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$a'_{23} = 0 \text{ なら} \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形に行基本変形で変形できます。

III) $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の時.

$$A \text{ が零行列でないなら、} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A \text{ が零行列なら} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形に行基本変形で変形できます。

以上の I), II), III) から、求める主張が得られます。

問 5.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$