

2008年冬学期  
 数学II 演習問題(文系) 第1回 の略解

担当： 小林俊行教授    TA： 及川一誠

問1.

$$A {}^tA = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & ax + by + cz \\ ax + by + cz & x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix},$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2 + x^2 & ab + xy & ac + xz \\ ab + xy & b^2 + y^2 & bc + yz \\ ac + xz & bc + yz & c^2 + z^2 \end{pmatrix}.$$

問2. (1)  $AB$  は  $m$  行  $l$  列,  ${}^tB {}^tA$  は  $l$  行  $m$  列.

(2)  $AB$  の  $(i, j)$  成分は  $\sum_{\alpha=1}^n a_{i\alpha} b_{\alpha j}$  である.  ${}^t(AB)$  の  $(i, j)$  成分は,  $AB$  の  $(j, i)$  成分と等しいので,

$$\sum_{\alpha=1}^n a_{j\alpha} b_{\alpha i}$$

となる. 一方,  ${}^tB {}^tA$  の  $(i, j)$  成分は

$$\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha i} a_{j\alpha}$$

であり, これは  ${}^t(AB)$  の  $(i, j)$  成分と等しい.

問3. 各成分が等しいことを示す.

$$\begin{aligned} ((AB)C \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) &= \sum_{\alpha=1}^l \left( \sum_{\beta=1}^m a_{i\beta} b_{\beta\alpha} \right) c_{\alpha j} \\ &= \sum_{\beta=1}^m a_{i\beta} \sum_{\alpha=1}^l (b_{\beta\alpha} c_{\alpha j}) \\ &= (A(BC) \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) \end{aligned}$$

問4.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

または

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$