

小林俊行 (KOBAYASHI Toshiyuki)

## A. 研究概要

### 1. 極小表現の幾何・解析的研究

極小表現は, すべてのユニタリ表現の中で最も根源的な対象であると考えられ, 1990年代より多くの代数的研究がなされている. 筆者は D 型単純群の極小表現に焦点を当て, 1つの極小表現の異種の幾何的モデルを構築することによって, それらが数学の異なる分野と結びつくような理論構成を目指し, この数年間で約 600 頁の論文を著してきた. 今年度の主な結果は以下の 5 つである.

1.A. (シュレーディンガーモデル) 極小表現の Schrödinger モデル (2003, with B. Ørsted) の大域公式を与えるために, 二次錐上においてフーリエ変換に相当する基本的な作用素であるユニタリ反転変換を導入し, その明示形を与えた (著書 [9]).

1.B. (フーリエ変換の変形理論) C 型単純群の極小表現である Weil 表現と D 型単純群の極小表現を連続的に結びつける “コアのユニタリ表現” を導入し, 特殊値が Fourier 変換, Hankel 変換, Dunkl 変換, Hermite 半群, Laguerre 半群となるような 3 パラメータをもつ作用素を構成し, 表現論的手法を用いてその基礎的性質 (Heisenberg の不確定性原理の一般化, Weyl 代数の一般化など) の統一的証明を与えた ([1], 口頭発表 [6]).

1.C. (特殊関数) 4 階の微分方程式を満たす “特殊関数論” への応用を見出した [2].

1.D. ジョルダン代数の共形変換群の枠組で, 極小表現の  $L^2$ -モデルを構築した (論文準備中).

1.E. A 型の ‘極小表現’ を半単純対称群に制限した時の分岐則を解析的手法で完全に決定した (M. Pevzner 氏等と共同) [5].

### 2. 可視的作用と無重複表現

複素多様体における可視的な作用という概念と無重複性の伝播という視点を導入し, 無限次元の場合および (組合せ論が絡む) 有限次元の場合を同時に含む, 無重複表現の統一的な理論をめざしている (口頭発表 [8]).

### 3. 不連続群

私の長年のモチーフである非リーマン空間における不連続群に関して, スペクトル理論の立場で新たな研究を行い, その第一歩となる論文を発表した ([6], 口頭発表 [9]).

### 4. 離散的な分岐則の理論

ユニタリ表現論の離散的な分岐則に関して, 最近の

結果のサーベイと予想を Zuckerman 60 歳記念の論文集に寄稿 (招待) し [8], また, カテゴリーにおける離散的な分岐則の判定条件を決定した [arXiv:1008.4544]. さらに, Zuckerman 加群を対称対に制限した時に離散的に分解する場合のリストを大島芳樹氏と準備中である.

### 5. 実解析

5.A. 古典的な Weyl calculus を高次元化し, その積の明示公式を決定した (A. Unterberger 氏等と共同研究) [JFA 2009].

5.B. 対称性の高いマルチプライヤー作用素を全て捕捉する代数的枠組みを与え, その  $L^p$  有界性や二次超曲面上の大域解析との関係を A. Nilsson 氏と共同で研究した [Math Z 2008, Ark Math 2009].

5.C. 無限次元表現における無重複分岐則をモチーフとして, J.-L. Clerc 氏等と共同で  $n$  次元球面の 3 重直積  $S^n \times S^n \times S^n$  上のある有理関数の積分値を具体的に決定した ( $n = 1$  の場合が Bernstein-Reznikov 積分となる) [5].

## 1. Analysis on minimal representations

Minimal representations are building blocks of unitary representations. Classic examples are the Weil representation, and intensive algebraic studies have been made since 1990s by many experts. Aiming for yet another *geometric approach* to minimal representations, in particular of type  $D$ , I have applied conformal techniques, got a new construction of minimal representations since 1991, found conserved quantities for ultra-hyperbolic equations that led us to their unitarizability, and also proved the existence of a *Schrödinger model* ( $L^2$ -model) with B. Ørsted. With G. Mano ([9]), we determined an explicit form of the *unitary inversion operator* on the  $L^2$ -model on the isotropic cones, that generalizes the Euclidean Fourier transform. I proposed also an original deformation theory in [1]. I also discovered “special functions” satisfying a certain ordinary differential equation of *order four* with G. Mano, Hilgert, and Möllers in [2] and [arXiv:0907.2608].

## 2. Multiplicity-free representations

I gave a plenary lecture in Winter School (Czech) on systematic and synthetic applications of the original theory of *visible actions*

on complex manifolds to multiplicity-free theorems, in particular, branching problems to symmetric pairs.

### 3. Discontinuous groups

Developing my continuing motif on discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces, I initiated the study on discrete spectrum on locally non-Riemannian symmetric spaces with F. Kassel [6].

### 4. Theory of discrete branching laws

I published an expository paper [8] with some conjectures and new developments on the theory of discretely decomposable unitary representations that I established in 1990s, and am preparing a classification of the triple  $(\mathfrak{q}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  such that Zuckerman's derived functor modules  $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$  decompose discretely with respect to a reductive symmetric pair  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  with Y. Oshima. I also extended the theory to the category  $\mathcal{O}$  [arXiv:1008.4544].

### 5. Real analysis - $L^p$ multipliers

5.A. We generalized the classic Weyl calculus to high dimensions, and found explicitly the composition formula with B. Ørsted, M. Pevzner and A. Unterberger ([JFA 2009]).

5.B. Inspired by the idea of prehomogeneous spaces, I studied multipliers with high symmetries with Nilsson ([Math Z 2008], [Ark Math 2009]).

5.C. I found an explicit formula of the integral of invariant meromorphic functions on  $S^n \times S^n \times S^n$  in a joint work with Clerc, Ørsted, and Pevzner [5].

### B. 発表論文

1. S. Ben Saïd, T. Kobayashi and B. Ørsted, "Generalized Fourier transforms  $\mathcal{F}_{k,a}$ ", C. R. Math. Acad. Sci. Paris **347** (2009), 1119–1124. Its full paper (74 pages) is available at arXiv:0907.3749.
  2. T. Kobayashi, "Orthogonal polynomials associated to a certain fourth order differential equation", to appear in Ramanujan Journal, preprint version is available at arXiv:0907.2612. 14pp.
  3. J.-L. Clerc, T. Kobayashi, B. Ørsted, and M. Pevzner, "Generalized Bernstein–Reznikov integrals", Mathematische Annalen **349** (2011), 395–431.
  4. 小林俊行, 張富士夫, 数学者とトヨタ自動車会長との対話「考えて考え抜くこと」, シュプリンガー数学クラブ第22巻, 2010年, pp. 3–11.
  5. T. Kobayashi, B. Ørsted, and M. Pevzner, "Geometric analysis on small unitary representations of  $GL(n, \mathbb{R})$ ", J. Funct. Anal. **260** (2011), 1682–1720.
  6. F. Kassel and T. Kobayashi, "Stable spectrum for pseudo-Riemannian locally symmetric spaces", C. R. Math. Acad. Sci. Paris **349** (2011), 29–33.
  7. T. Kobayashi and J. Möllers, "An integral formula for  $L^2$ -eigenfunctions of a fourth order Bessel-type differential operator", Integral Transforms and Special Functions (2011), (published online first, on 27 January 2011), 11 pp.
  8. T. Kobayashi, "Branching problems of Zuckerman's derived functor modules", preprint, submitted to "Representation Theory and Mathematical Physics: in honour of Gregg Zuckerman's 60th birthday", アメリカ数学会, 27 pp.
- [著書]
9. T. Kobayashi and G. Mano, "The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group  $O(p, q)$ ", Mem. Amer. Math. Soc. **212**, no. 1000, アメリカ数学会, 2011年, vi+132 pp.
  10. 儀我美一, 小林俊行 (編), 『数学は役に立っているか?』, シュプリンガー数学クラブ第22巻, シュプリンガー・ジャパン, 2010年.

### C. 口頭発表

1. Discontinuous Groups on pseudo-Riemannian Spaces, Mathematische Arbeitstagung 2009, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Germany, June 2009.

2. Global Geometry and Analysis on Locally Symmetric Spaces—Beyond the Riemannian case, Yale University 談話会, USA, March 2009.
  3. Conformal Geometry and Schrödinger Model of Minimal Representations (opening lecture), Bent Ørsted 教授 60 歳記念研究集会: Representations, Lie groups, and Conformal Geometry, Göttingen, Germany, April 2009.
  4. Branching Problems for Zuckerman’s Derived Functor Modules, Representation Theory and Mathematical Physics (Gregg Zuckerman 教授 60 歳記念研究集会), Yale University, USA, October 2009.
  5. Restriction of Unitary Representations to Reductive Subgroups, Encuentro de Teoria de Lie (Jorge Vargas 教授 60 歳記念研究集会), Córdoba, Argentina, November 2009.
  6. Conformal Geometry, Schrödinger Model of Minimal Representations, and Deformation of Fourier Transforms, (**6.A.**–**6.L.** では講演タイトル, 内容は多少異なるが, テーマが同じなので 1 つにまとめる.) **6.A.** Symmetry and Physics, Yale University, USA, March 2009; **6.B.** Research Seminar “Lie Theory,” Universität Paderborn, Germany, April 2009; **6.C.** 83ème Rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens (Encounter between theoretical physicists and mathematicians), Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, France, June 2009; **6.D.** Representation Theory XI, Dubrovnik, Croatia, June 2009 (two lectures); **6.E.** Representation Theory of Real Reductive Groups, University of Utah, Salt Lake City, USA, July 2009; **6.F.** Workshop on Integral Geometry and Group Representations, Tambara Institute of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, Japan, August 2009. **6.G.** Geometry and Quantum Theory, Nijmegen, the Netherlands, June 2010. **6.H.** Autour des Transformations de Fourier, Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM), Luminy, France, September 2010. **6.I.** Colloquium, Université de Reims, France, October 2010. **6.J.** 9th Oka Symposium, Nara Women’s University, Japan, December 2010. **6.K.** Special Seminar [Mathematics], IPMU, the University of Tokyo, Japan, December 2010. **6.L.** Geometry and Dynamics Seminar, Université Lille, France, January 2011.
  7. Applications of Branching Laws to Certain Problems on Global Analysis, The Seventh Workshop in Lie Theory and its Applications, Córdoba, Argentina, November 2009.
  8. Visible Actions and Multiplicity-free Representations, Plenary Lectures (3 lectures), The 30th Winter School on Geometry and Physics, Srní, Czech, January 2010.
  9. Stable Spectrum on Locally Homogeneous Spaces, Structure and Representations of Exceptional Groups, Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery (BIRS), Canada, July 2010.
  10. Geometric Quantization, Limits, and Restrictions—Some Examples for Elliptic and Minimal Orbits, **10.A.** Geometric Quantization in the Non-compact Setting, Oberwolfach, Germany, February 2011; **10.B.** (closing lecture), The 10th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory (NORTH10), Kyushu University, Japan, February 2011.
- D. 講義
1. 大域幾何概論・幾何学 XE: 複素幾何と無限次元表現論. 複素幾何的手法による無限次元表現の最先端のトピックの入門的講義. (数理大学院・4 年生共通講義)
  2. 微分幾何学・幾何学 XB: リー群と等質空間: リー群・リー環の定義, 例, 線型リー群, 等質空間, 有界対称領域, 簡約リー群の構造. (数理大学院・4 年生共通講義)

3. 数学 II: 線形代数学: 抽象ベクトル空間上の線形代数の基礎. 通年. (教養学部前期課程講義)
  4. 数学 II (文系, 夏): 行列とベクトル, ランク概念, 連立一次方程式と行列, 外積と内積, ベクトル解析, サイズの小さい行列の幾何学的意味, 一般のサイズの行列式, 逆行列 (+10 回の演習). (教養学部前期課程講義)
  5. 数学 II (文系, 冬): 行列とベクトル, ランク概念, 連立一次方程式と行列, 外積と内積, ベクトル解析, サイズの小さい行列の幾何学的意味, 一般のサイズの行列式, 逆行列, 固有値と対角化 (+10 回の演習). (教養学部前期課程講義)
  6. 数学講究 XA: テキスト: G. Folland (1989) Harmonic Analysis in Phase Space; Goodman-Wallach (2009) Symmetry, Representations, and Invariants. (数理 4 年生テキストセミナー)
  7. 数学講究 XB: 局所から大域へ—リー群と不連続群の世界: 擬リーマン等質空間における不連続群に関する未解決問題について. (数理大学院)
  8. Visible Actions and Multiplicity-free Representations, The 30th Winter School on Geometry and Physics. Srni, Czech, January 2010. 複素多様体における可視的作用を用いた, 無重複表現の統一理論のころもを紹介. 対象: 専門家・ポスドク・大学院生.
  9. Multiplicity-Free Representations: Complex Geometric Methods in Representation Theory. Graduate course at Harvard University, 40 回の講義, アメリカ. 2008 年夏. 対象: ポスドク・大学院生.
- E. 修士・博士論文
- F. 対外研究サービス
- [ジャーナルのエディター]
1. Managing Editor, Japanese Journal of Mathematics (日本数学会) (2005–)
  2. Editor, International Mathematics Research Notices (Oxford 大学出版) (2002–)
  3. Managing Editor, Takagi Booklet, vol. 1–8 (日本数学会) (2005–)
  4. Editor, Geometriae Dedicata (Springer) (2000–)
  5. Editor, Advances in Pure and Applied Mathematics (de Gruyter) (2008–)
  6. Editor, International Journal of Mathematics (World Scientific) (2004–)
  7. Editor, Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo (2007–)
  8. Editor, Kyoto Journal of Mathematics (2010–)
  9. Editor in Chief, Journal of Mathematical Society of Japan (日本数学会) (2002–2004; 2004–2006), Editor (1998–2006)
  10. Editor, Publications RIMS (2003–2007)
  11. Editor, Progr. Math. vol. 255 (with W. Schmid, J.-H. Yang), Birkhäuser, 2007
- [学会・他大学の委員など]
12. 審査委員: European Research Council (2010–)
  13. 日本学術会議連携会員 (2006–2008)
  14. 日本数学会理事 (2003–2005; 2005–2007)
  15. 日本数学会評議員 (2003–2005; 2005–2007)
  16. 京都大学数理解析研究所専門委員 (2007–2009; 2009–)
  17. 科学研究費等の審査委員: 日本 (JSPS), 米国 (NSF-AMS), ドイツ, ルクセンブルク, 中華人民共和国・香港 (various years)
  18. 審査委員: Prize Committee (anonymous) (various years)
  19. Jury, Habilitation, Reims University, France (2006)
  20. Jury, Doctor of Philosophy, Paderborn University, Germany (2010)
  21. Jury, Doctor of Philosophy, Utrecht University, the Netherlands (2011)

22. IPMU, 上席科学研究員 (2009.8-) [国際研究集会のオーガナイザーなど]
23. オーガナイザー, Harmonische Analysis und Darstellungstheorie Topologischer Gruppen, Oberwolfach, Germany, 14–20 October 2007 (B. Krötz, E. Lapid, and C. Torossian)
24. Scientific Committee, Hermitian Symmetric Spaces, Jordan Algebras and Related Problems (conference in honor of Prof. Jean-Louis Clerc), Centre International de Recherches Mathématiques, Luminy, France, 23–27 June, 2008
25. オーガナイザー, 微分方程式と対称空間—大島利雄先生還暦記念研究集会, 東京大学, 2009年1月13–16日 (with H. Matumoto, H. Ochiai and H. Sekiguchi)
26. オーガナイザー, Mathematics: From Today to Tomorrow—Global COE Opening Symposium at Tokyo, 東京大学, 2009年1月30日–2月1日 (with Y. Kawahigashi, Y. Kawamata and T. Saito)
27. オーガナイザー, The 8th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory (NORTH 8), 大津, 2009年3月8–11日 (with K. Nishiyama and H. Yamashita)
28. オーガナイザー, GCOE Spring school on representation theory, 東京大学, 2009年3月12–17日
29. オーガナイザー, Conference in honor of Bent Ørsted’s 60th birthday: Representations, Lie groups, and conformal geometry, Göttingen, Germany, 6–10 April 2009 (with M. Pevzner, P. Ramacher and I. Witt)
30. オーガナイザー, Workshop on Integral Geometry and Group Representations, 玉原, 2009年8月5–10日 (with F. Gonzalez, T. Kakehi and T. Oshima)
31. Scientific Committee, Conference in honor of Takayuki Oda’s 60th birthday, 東京大学, 2009年9月14–17日
32. オーガナイザー, IPMU workshop: Quantizations, integrable systems and representation theory, IPMU, 東京大学柏キャンパス, 2009年11月5–6日 (with M. Guest and T. Kohno)
33. オーガナイザー, Representation Theory and Harmonic Analysis, Oberwolfach, Germany, 14–20 November 2010 (with B. Krötz)
34. Scientific committee, Recent Developments in Harmonic Analysis and their Applications, Marrakech, Morocco, 25–29 April 2011
35. オーガナイザー, Branching Problems for Unitary Representations, Max Planck Institute for Mathematics Bonn, Germany, 25–29 July 2011 (with B. Ørsted and B. Speh)
36. Scientific committee, Harmonic Analysis, Operator Algebras and Representations, CIRM, Luminy, France, 21–26 October 2012
37. オーガナイザー, 高木レクチャー, 第1回 (京都大学数理研, 2006年11月), 第2回 (東京大学, 2007年5月), 第3回 (東京大学, 2007年11月), 第4回 (京都大学, 2008年6月), 第5回 (東京大学, 2008年10月), 第6回 (北海道大学, 2009年6月), 第7回 (東京大学, 2009年11月), 第8回 (京都大学数理研, 2010年11月), 第9回 (京都大学数理研, 2011年6月) (with Y. Kawahigashi, H. Nakajima, K. Ono and T. Saito)
38. オーガナイザー, リー群論・表現論セミナー (2007–東大; 2003–2007 RIMS; 1987–2001 東大)
- G. 受賞
1. 井上學術賞 (2010) 「無限次元の対称性の解析」
  2. Monna Lecturer, “リーマン幾何の枠組みを越えた不連続群論”, Netherland (2008)
  3. フンボルト賞 (数学部門), Germany (2008)

4. Sackler Distinguished Lecturer, “ユニタリ表現の分岐則の理論”, Israel (2007)
5. 日本学術振興会賞 (2007) 「代数・幾何・解析にまたがるリー群の無限次元表現の理論と不連続群の研究」
6. 大阪科学賞 (2006) 「リーマン幾何の枠組を超えた不連続群論の創始とリー群の無限次元表現における離散的分岐則の発見」
7. [学生の受賞] 大島芳樹. 学生表彰「東京大学総長賞」(2010)

spaces” (2010.2.2) in a joint seminar of Lie Groups and Representation Seminar and Topology Seminar, and also a series of informal lectures on this topic. Further, she gave a seminar talk at Kyoto University, and a one-hour talk at the 9th workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory held in Hokkaido University.

#### H. 海外からのビジター

1. Dr. Pierre Clare (2011 January–March, JSPS visitor)  
He gave a seminar talk entitled “Connections between noncommutative geometry and Lie groups representations” (2011.1.18)
2. Professor Michael Eastwood (2010 November)  
He gave a seminar talk: “Twistor theory and the harmonic hull” and GCOE lectures: “How to recognise the geodesics of a metric connection” and “Invariant differential operators on the sphere” (2010.11.2, 5, 8, 計 3 回)
3. Professor Birgit Speh (2010 May–June)  
She gave a series of lectures: “On the eigenvalues of the Laplacian on locally symmetric hyperbolic spaces” (2010.5.18); “Introduction to the cohomology of locally symmetric spaces 1, 2” (2010.6.1, 3, 計 2 回, GCOE レクチャーズ)
4. Professor Yves Benoist (2010 February–March)  
He gave a series of lectures: “Discrete groups acting on homogeneous spaces I–V” (2010.2.17, 18, 19, 計 5 回). He is to receive Clay Research Award (2011).
5. Dr. Fanny Kassel (2010 January–February)  
She gave a seminar talk entitled “Deformation of compact quotients of homogeneous