博士課程学生 (Doctoral Course Student)
里見 貴志 (SATOMI Takashi)
(学振 DC1)
(FMSP コース生)

A. 研究概要

私は 2 つのテーマについて研究している．
1 つ目は Cayley グラフのエクスパンダー性評価についての研究である．G を有限群，S を G の部分集合とする．Tao は重み付き Balog-Szemerédi-Gowers の定理を使って，Cayley グラフ $\mathrm{Cay}(G,S)$ のエクスパンダー性を評価する手法を導入した．重み付き Balog-Szemerédi-Gowers の定理とは，「N は正の整数とし，G 上の正値関数 f の畳み込み $f*f$ の L^2 ノルムが大きいとき，$\mathrm{supp}f$ が S と大体一致し，$|S^N|/|S|$ が 1 に近いような $S\subset G$ が存在する」という定理である．
Tao は「(X,Y,E) が有限二部グラフとし，D をグラフ密度とすると，$|A|\gg D|X|$，$|B|\gg D|Y|$ となる $A\subset X$，$B\subset Y$ が存在し，任意の $a\in A$，$b\in B$ に対し a，b を結ぶ長さ 3 の経路の個数が $O(D^5)|X||Y|$ 以上になる」という補題を使って重み付き Balog-Szemerédi-Gowers の定理を証明した．私は長さ 3 以上の経路の場合でもこの補題が成り立つことを示し，さらに X，Y が有限測度空間の場合に一般化した．
また，私は異なる議論で重み付き Balog-Szemerédi-Gowers の定理を証明することで，定理の評価を改良した．さらに，G がユニモジュラーな局所コンパクト群の場合に同様の定理が成り立つことを示した．
2 つ目は，一般の局所コンパクト群に関する Young の不等式の最良値についての研究である．$1+1/q=1/p_1+1/p_2$ となる $p_1,p_2,q\geq 1$ に対し，$\|\phi_1*\phi_2\|_q\leq\|f\|_{p_1}\|\phi_2\|_{p_2}$ という関係が成り立つ（測度はユニモジュラーな局所コンパクト群 G の Haar 測度）．
ここで，$p_1,p_2>1$ とする．このとき，G が開かつコンパクトな部分群を持つことが，等号成立する場合があるための必要十分条件となることが Fournier によって示されている．
以降，G が開かつコンパクトな部分群を持たないとする．任意の ϕ_1，ϕ_2 に対し $\|\phi_1*\phi_2\|_q\leq c\|\phi_1\|_{p_1}\|\phi_2\|_{p_2}$ をみたすような best possible な定数 c を $c(G)$ とする．Fournier は G が開かつコンパクトな部分群を持たないならば，$c(G)$ は G によらないある定数 $C<1$ で上から抑えられることも示した．私は，このような $C<1$ の best possible な定数が $c(\mathbb{R})$ になる，すなわち G が開かつコンパクトな部分群を持たないならば $\|\phi_1*\phi_2\|_q\leq c(\mathbb{R})\|\phi_1\|_{p_1}\|\phi_2\|_{p_2}$ が成り立つことを示した．
さらに，$p\geq 1$ と $\|\phi_1\|_1$，$\|\phi_1\|_\infty$，$\|\phi_2\|_1$，$\|\phi_2\|_\infty$ を固定したとき，$\|\phi_1*\phi_2\|_p$ の取りうる値の上限を与えた．また，$G=\mathbb{R}$ のときに $\|\phi_1*\phi_2\|_p$ が上限の値と一致する場合が存在することも証明した．

I am studying about two themes.
One is the study of the expanderness of Cayley graphs. Let G be a finite group and S a subset of G. Tao introduced a method for studying the expanderness of Cayley graph $\mathrm{Cay}(G,S)$ with the weighted Balog-Szemerédi-Gowers theorem. The statement of the weighted Balog-Szemerédi-Gowers theorem is as follows. “Let N be a positive integer and f a positive function on G. If the L^2-norm of $f*f$ is large, then there exists $S\subset G$ such that $\mathrm{supp}f$ is almost same as S and $|S^N|/|S|$ is close to 1.”
Tao proved this theorem by using the following lemma. “Let (X,Y,E) be a finite bipartite graph and D its graph density. Then there exist $A\subset X$ and $B\subset Y$ such that $|A|\gg D|X|$, $|B|\gg D|Y|$, and the number of paths of length 3 from a to b is more than $O(D^5)|X||Y|$ for all $a\in A$ and $b\in B$.” I proved that this lemma holds even when the length of paths is longer than 3, and I extended the lemma in the case where X and Y are finite measure spaces.
I improved the estimate in the weighted Balog-Szemerédi-Gowers theorem by a different argument. Moreover, I generalized the theorem in the case where G is a unimodular locally compact group.
The other is the study of the best constant of the Young’s inequality with respect to general locally compact groups.
If $p_1,p_2,q\geq 1$ satisfies $1+1/q=1/p_1+1/p_2$,

then we have $\|\phi_1 * \phi_2\|_q \leq \|\phi_1\|_{p_1}\|\phi_2\|_{p_2}$ (the measure is a Haar measure of G that is unimodular locally compact group).

Let $p_1, p_2 > 1$. Then, they are equivalent that G has an open compact subgroup and that there is the case when the equality holds. This proposition is proved by Fournier.

From now on, suppose that G has no open compact subgroups. Let $c(G)$ be the best constant c that holds $\|\phi_1 * \phi_2\|_q \leq c\|\phi_1\|_{p_1}\|\phi_2\|_{p_2}$ for any ϕ_1, ϕ_2. Fournier also proved that there exists constant $C < 1$ (independent of G) such that $c(G) \leq C$ holds if G has no open compact subgroups.

I proved that the best constant of $C < 1$ is $c(\mathbb{R})$, in other word, I proved that $\|\phi_1 * \phi_2\|_q \leq c(\mathbb{R})\|\phi_1\|_{p_1}\|\phi_2\|_{p_2}$ holds for any G that has no open compact subgroups.

Furthermore, I calculated the upper limit of $\|\phi_1 * \phi_2\|_p$ when p, $\|\phi_1\|_1$, $\|\phi_1\|_\infty$, $\|\phi_2\|_1$, and $\|\phi_2\|_\infty$ are fixed. I proved that there is the case when $\|\phi_1 * \phi_2\|_p$ is equal to this upper limit if $G = \mathbb{R}$.

B. 発表論文

1. T. Satomi：算術的組み合わせ論による等質空間上のたたみ込みのスペクトル評価, 東京大学大学院数理科学研究科修士論文 (2019).
2. T. Satomi：局所コンパクト群上のたたみ込みの L^p 収束性と Young の不等式の関係, 京都大学数理解析研究所講究録 **2139** (2019) 136–147.

C. 口頭発表

1. Selberg's expander construction (after Tao) について, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2017 年 8 月.
2. (1) Freiman's product theorem の紹介, (2) Balog-Szemerédi-Gowers の定理の評価の改良と一般の不変測度への拡張, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2018 年 8 月.
3. 群上のたたみ込み関数の L^2 評価とグラフ理論の関係, 作用素環セミナー, 東京大学数理科学研究科, 2019 年 4 月.
4. 群上のたたみ込みに関する Young の不等式の拡張, RIMS 共同研究「表現論とその周辺分野の進展」（研究代表者：大島芳樹先生）, 京都大学数理解析研究所, 2019 年 7 月.
5. Larsen-Pink-Tao による $SL_d(k)$ の Product theorem の紹介, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2019 年 8 月.
6. ユニモジュラーな局所コンパクト群上でのたたみ込みの L^p 評価と Young の不等式の関係, 2019 年度表現論ワークショップ, 県民ふれあい会館（鳥取県立生涯学習センター）, 2020 年 1 月.