

博士課程学生 (Doctoral Course Student)

甘中一輝 (KANNAKA Kazuki)

(学振 DC1)

(FMSP コース生)

A. 研究概要

擬リーマン多様体 M はラプラス作用素 $\Delta_M = \text{div} \circ \text{grad}$ と呼ばれる 2 階の特別な微分作用素を有する. M がコンパクトなリーマン多様体の場合には, Δ_M のスペクトルの性質として, 例えば Δ_M の固有値の重複度が有限である事が知られているが, M が非リーマンの場合には M がコンパクトであっても固有値の重複度は有限にも無限にもなり得る. この様に Δ_M のスペクトルの性質は一般には未開拓である.

さて, 局所半単純対称空間 $M = \Gamma \backslash G/H$ は擬リーマン多様体の重要なクラスを占める. ここで G/H は半単純対称空間, Γ は G の離散部分群で G/H に固らかつ固定点自由に作用するものである. 小林俊行は 1980 年代後半から非リーマンでもよい局所半単純対称空間上の大域解析の研究を創始した. 2016 年には Fanny Kassel との共著論文で局所半単純対称空間の離散スペクトラムの概念を提唱し, ある条件の下無限個の安定離散スペクトラムを発見した.

このような背景で, 本年度は離散スペクトラムの重複度についての研究を志した. その際, 低次元の最も簡単な場合である 3 次元の局所反ド・ジッター空間 $\Gamma \backslash \text{SO}(2,2)/\text{SO}(2,1)$ の場合を調べ上げる事をひとまずの目標として設定した. この設定では離散スペクトラムとはラプラス作用素の L^2 固有値全体からなる集合の事である. $\text{SO}(2,2)/\text{SO}(2,1)$ のある球関数の族の Γ に関する Poincaré 級数の一次独立性を考察する事で, 任意の Γ に対して局所反ド・ジッター空間の離散スペクトラムの重複度が非有界である事を証明した. さらにこの研究の過程で, 上述の安定離散スペクトラムに対して, その重複度と呼ぶべき概念を導入し, その非有界性を証明した.

A pseudo-Riemannian manifold has an intrinsic second-order differential operator $\Delta_M = \text{div} \circ \text{grad}$ called the Laplacian. The spectral properties of Δ_M have been much investigated for compact Riemannian manifolds. However,

it is not the case for non-Riemannian manifolds.

For example, the multiplicities of eigenvalues are finite in the Riemannian case, however they can be infinite even if M is compact in the non-Riemannian case.

Locally semisimple symmetric spaces $M = \Gamma \backslash G/H$ are important examples of pseudo-Riemannian manifolds. Here, G/H is a symmetric space and Γ is a discrete subgroup of G acting properly and freely on G/H . Toshiyuki Kobayashi initiated the study of global analysis on non-Riemannian locally symmetric spaces in the late 1980s. In 2016, Kobayashi and Fanny Kassel introduced the notion of discrete spectrum of locally symmetric spaces and found infinite stable discrete spectrum under some conditions.

In this academic year, I intended to study the multiplicity of discrete spectrum. As a first step, I intended to investigate it for locally anti-de-Sitter spaces $\Gamma \backslash \text{SO}(2,2)/\text{SO}(2,1)$. In this setting, discrete spectrum coincides with the set of L^2 -eigenvalues of the Laplacian. Considering linear independence of a family of Poincaré series for Γ of spherical functions on $\text{SO}(2,2)/\text{SO}(2,1)$, I proved the unboundedness of the multiplicities of L^2 -eigenvalues for any $\Gamma \backslash \text{SO}(2,2)/\text{SO}(2,1)$. Moreover, I introduced the notion of the multiplicities of stable L^2 -eigenvalues and proved their unboundedness.

B. 発表論文

1. 甘中一輝:“反ド・ジッター空間における無限生成の強不連続性を有さないある不連続群の軌道の数え上げについて”, 東京大学修士論文 (2018).
2. K. Kannaka:“反ド・ジッター空間における無限生成の強不連続性を有さないある不連続群の軌道の数え上げについて”, 京都大学数理解析研究所講究録 **2103**, 表現論と代数、幾何、解析をめぐる諸問題 (研究代表者: 久保利久 (龍谷大学)) (2018), 43-59.
3. K. Kannaka:“On the discrete spectrum of a certain non-sharp locally anti-de Sitter space”, 京都大学数理解析研究所講究録

2136, 保型形式, 保型表現とその周辺 (研究代表者: 若槻聡 (金沢大学)) (2019), 11 pages.

4. K. Kannaka: "Counting orbits of certain infinitely generated non-sharp discontinuous groups for 3-dimensional anti-de Sitter space", preprint, arXiv:1907.09303(2019), 22 pages.

C. 口頭発表

1. 反ド・ジッター空間における無限生成の強不連続性を有さないある不連続群の軌道の数え上げについて, "表現論と代数, 幾何, 解析をめぐる諸問題"(研究代表者: 久保 利久 (龍谷大学)), 京都大学数理解析研究所, 2018年6月.
2. 反ド・ジッター空間における無限生成の強不連続性を有さないある不連続群の軌道の数え上げについて, "リーマン面に関連する位相幾何学", 東京大学大学院数理科学研究科, 2018年8月.
3. 論文 "Poincare series for non-riemannian locally symmetric spaces ", F. Kassel and T. Kobayashi(2016) の3次元反ド・ジッター空間に限った紹介, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2018年8月.
4. 反ド・ジッター空間における無限生成の強不連続性を有さないある不連続群の軌道の数え上げについて, 微分トポロジーセミナー, 京都大学大学院理学研究科, 2018年12月.
5. On the discrete spectrum of a certain non-sharp locally anti-de Sitter space, "保型形式, 保型表現とその周辺"(研究代表者: 若槻聡 (金沢大学)), 京都大学数理解析研究所, 2019年1月.
6. 反ド・ジッター空間における, ある無限生成の不連続群の軌道の数え上げについて, 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 早稲田大学, 2019年2月.
7. 論文 "Proper affine actions and geodesic flows of hyperbolic surfaces"(W. M. Goldman, F. Labourie, G. Margulis, 2009) の

紹介, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2019年8月.

8. 局所反ド・ジッター空間の離散スペクトラムの重複度について, 北陸数論セミナー, 金沢大学サテライトプラザ, 2019年10月.
9. 3次元コンパクトローレンツ多様体の離散スペクトラムの重複度について, 2019年度表現論ワークショップ, 県民ふれあい会館 (鳥取県立生涯学習センター), 2020年1月.
10. The multiplicity of discrete spectrum for 3-dimensional Lorentzian manifolds, East Asian Core Doctoral Forum on Mathematics 2020, Kavli IPMU, Tokyo, January, 2020.

F. 対外研究サービス

"East Asian Core Doctoral Forum on Mathematics 2020" (東京大学数物連携宇宙研究機構, 2020年1月14~17日) の student organizer.

G. 受賞

数理科学研究科長賞 (2018年)