博士課程学生 (Doctoral Course Students)

甘中 一輝 (KANNAKA Kazuki)

(学振 DC1)

(FMSP コース生)

A. 研究概要

2016 年小林俊行と Fanny Kassel は不定値計量を持つ局所簡約型対称空間 $\Gamma\backslash G/H$ における大域解析の理論の枠組みを与え, さらにある条件の下で可算無限個の "安定離散スペクトラム" が存在する事を見出した. その過程で, 彼らは対称空間 G/H の "擬球"$B(R)$(R は "半径") を定義し, ある正の数 a, A が存在して, 各 Γ 軌道 $\Gamma\cdot x$ ($x \in G/H$) の $B(R)$ における数え上げ $N_\Gamma(x,R) = \#(\Gamma\cdot x \cap B(R))$ について, $N_\Gamma(x,R) \leq Ae^{aR}$ が成立するならば, $\Gamma\backslash G/H$ の可算無限個の離散スペクトラムを構成できることを示した. 以下ではこの $N_\Gamma(x,R)$ についての条件を ★ と書くことにする.

本年度の研究では, 対称空間として 3 次元反ド・ジッター空間 $\mathbf{AdS}^3 = \{(x_1.x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2 = 1\}$ を取り上げ, その（等長的な）不連続群 Γ に対して, Γ-軌道の $\mathbf{AdS}^3$ における数え上げが条件 ★ を満たすかを考察することで, $\Gamma\backslash\mathbf{AdS}^3$ の離散スペクトラムを構成しようと試みた. その結果得られた数え上げの評価に関しての 2 つの結果を説明する. 2017 年に Guéritaud と Kassel によって構成された $\mathbf{AdS}^3$ のある無限生成の不連続群を, 本研究では少し一般化した形で構成し, その数え上げを考察することで次の定理を得た: 滑らか, 下に凸, さらに狭義単調増加な関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (例えば $e^R, e^{e^R}, \ldots$) に対して, ある $\mathbf{AdS}^3$ の不連続群 Γ_f が存在して $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\frac{N_{\Gamma_f}(E,R)}{f(R)} = \infty$. ここで $E = (1,0,0,0) \in \mathbf{AdS}^3$ である. 特にすべての不連続群が条件 ★ を満たすわけではない事が分かった.

もう一つの結果を説明する. 小林俊行 (1998) による簡約群の擬リーマン等質空間における不連続群の変形理論に由来して, 小林と Kassel(2016) は不連続群の強不連続性なる概念を定義し, 彼らはこの性質を持つならば条件 ★ を満たす事を示したが,　この逆は成立しない事が分かった. 詳しく述べると先に述べた Guéritaud と Kassel による不連続群を一般化したものがほとんど強不連続性を満たさないことを示し, その中で条件 ★ を満たすものが（比較的多く）存在することを示した.

In 2016, Toshiyuki Kobayashi and Fanny Kassel initiated the analysis on non-Riemannian locally symmetric spaces $\Gamma\backslash G/H$ and constructed "universal discrete spectrum" under some conditions. In their paper, they defined the "pseudo-ball" $B(R)$ of "radius" R in symmetric spaces G/H and proved that the discrete spectrum of $\Gamma\backslash G/H$ is infinite if there exist positive numbers a and A such that for any $x \in G/H$, $N_\Gamma(x,R) = \#(\Gamma\cdot x\cap B(R)) \leq Ae^{aR}$. In the following, this condition for $N_\Gamma(x,R)$ is denoted by ★.

The 3-dimensional anti-de Sitter space $\mathbf{AdS}^3 = \{(x_1.x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2 = 1\}$ is a Lorentzian symmetric space. In this year, I tried to study the discrete spectrum of locally anti-de Sitter spaces $\Gamma\backslash\mathbf{AdS}^3$ determining whether Γ satisfies the condition ★. Generalizing an example in the paper of Guéritaud and Kassel, I constructed a family of infinitely generated groups acting properly discontinuously and isometrically on $\mathbf{AdS}^3$ and studied $N_\Gamma(x,R)$ for these discontinuous groups. Consequently, I gave the following results: For any smooth, convex, and strictly increasing function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (for example, $e^R, e^{e^R}, \ldots$), there exists a discrete group Γ_f acting properly discontinuously and isometrically on $\mathbf{AdS}^3$ such that $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\frac{N_{\Gamma_f}(E,R)}{f(R)} = \infty$. Here $E = (1,0,0,0) \in \mathbf{AdS}^3$. In particular, not all discontinuous groups satisfy the condition ★.

I explain another result. Tracing back to the deformation theory of discontinuous groups for pseudo-Riemannian homogeneous manifolds of reductive groups by Toshiyuki Kobayashi(1998), Kobayashi and Kassel defined the notion of sharpness for discontinuous groups and proved that sharp discontinuous groups satisfy the condition ★. I proved that there exist non-sharp groups which satisfy the condition ★. Most of discontinuous groups which I constructed by generalizing an example in the paper of Guéritaud and Kassel are not sharp and many of such non-sharp groups satisfy the condition ★.

B. 発表論文

1. 甘中一輝, “反ド・ジッター空間における無限生成の強不連続性を有さないある不連続群の軌道の数え上げについて”, 東京大学修士論文, 2018.

C. 口頭発表

1. 論文“ Essential Self Adjointness for the Dirac Operator and Its square ”(J.A.Wolf) の紹介，Workshop on “ Actions of Reductive Groups and Global Analysis ”，東京大学玉原国際セミナーハウス，2016 年 8 月．

2. 論文“ Poincare series for non-riemannian locally symmetric spaces ”(Kobayashi-Kassel,2016) の一部の紹介，Workshop on “ Actions of Reductive Groups and Global Analysis ”，東京大学玉原国際セミナーハウス，2017 年 8 月．

3. 反ド・ジッター空間における無限生成の強不連続性を有さないある不連続群の軌道の数え上げについて, “表現論と代数、幾何、解析をめぐる諸問題”(研究代表者: 久保 利久 (龍谷大学)), 京都大学数理解析研究所, 2018 年 6 月.

4. 反ド・ジッター空間における無限生成の強不連続性を有さないある不連続群の軌道の数え上げについて, “リーマン面に関連する位相幾何学”, 東京大学大学院数理科学研究科, 2018 年 8 月.

5. 論文 “Poincare series for non-riemannian locally symmetric spaces ”, F. Kassel and T. Kobayashi(2016) の 3 次元反ド·ジッター空間に限った紹介 , Workshop on “ Actions of Reductive Groups and Global Analysis ”，東京大学玉原国際セミナーハウス，2018 年 8 月．

6. 論文 “A Geometric Construction of the Discrete Series for Semisimple Lie Groups ”(M.Atiyah and W.Schmid) の紹介, 第 9 回倉敷整数論集会, 倉敷シーサイドホテル, 2018 年 9 月.

7. 反ド·ジッター空間における無限生成の強不連続性を有さないある不連続群の軌道の数え上げについて, 微分トポロジーセミナー, 京都大学大学院理学研究科,2018 年 12 月.

8. On the discrete spectrum of a certain non-sharp locally anti-de Sitter space, “保型形式，保型表現とその周辺”(研究代表者: 若槻聡 (金沢大学)), 京都大学数理解析研究所, 2019 年 1 月.

9. 反ド·ジッター空間における, ある無限生成の不連続群の軌道の数え上げについて, 「リーマン面·不連続群論」研究集会, 早稲田大学, 2019 年 2 月.

G. 受賞

1. 数理科学研究科長賞 (2018 年度)