博士課程学生 (Doctoral Course Students)

伊藤 要平 (ITO Yohei)

A. 研究概要

$\mathcal{D}$-加群のフーリエ変換は複素線型空間 $X = \mathbb{C}^N$ 上の代数的 $\mathcal{D}$-加群と双対空間 Y 上のそれらとの間の変換である．この変換はホロノミー性を保つが正則性を保たない．しかしモノドロミックな正則ホロノミー $\mathcal{D}$-加群のフーリエ変換は再びモノドロミックかつ正則ホロノミーになる事が 1986 年頃に Brylinski により証明された．つまりモノドロミック性は正則性を保つための十分条件である．そこで次のような問題を考える．

I 正則性を保つための必要十分条件は何か.

II 一般の正則ホロノミー $\mathcal{D}$-加群のフーリエ変換の不確定度はどのように記述されるか.

これらの問題について enhanced ind-sheaf の理論を用いて以下の結果を得た (竹内潔氏との共同).

問題 (I) について

一つ目の結果として, 一般に正則ホロノミー $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ のフーリエ変換 $\mathcal{M}^\wedge$ がモノドロミックになる事を示した (発表論文 [3], 口頭発表 [8], ポスター発表 [7])．この結果の系として, $\mathcal{M}^\wedge$ が正則ホロノミーであるならば $\mathcal{M}$ はモノドロミックである事がわかる．これは Brylinski の定理の逆である．つまりモノドロミック性は正則性を保つための必要十分条件である事がわかった．また, 不確定特異点型リーマン-ヒルベルト対応を用いて Brylinski の定理の別証明を与えた.

問題 (II) について

正則ホロノミー $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ に対してそのフーリエ変換 $\mathcal{M}^\wedge$ の enhanced solution complex を基本的な enhanced ind-sheaf の直和で記述した (発表論文 [2], 口頭発表 [5, 9], ポスター発表 [7])．この公式により以下の結果を得た．(i)$\mathcal{M}$ の特性多様体から定まる $\mathbb{C}^*$-conic な Zariski 開集合 Ω 上で $\mathcal{M}^\wedge$ は可積分接続になる (つまり $\mathcal{M}^\wedge$ は Ω 上で特異点を持たない)．(ii)Ω の 0 でない点を通る任意の複素直線に沿って, $\mathcal{M}^\wedge$ は 0 を確定特異点, ∞ を不確定特異点に持つ．(iii)$\mathcal{M}^\wedge$ はジェネリックな法スライスに沿って $Y \setminus \Omega$ で不確定特異点をもつ．更に不確定特異点における $\mathcal{M}^\wedge$ の Hukuhara-Levelt-Turrittin 分解に現れる指数項と重複度を具体的に求めた.

The Fourier transform of $\mathcal{D}$-modules interchanges algebraic $\mathcal{D}$-modules on complex vector spaces $X = \mathbb{C}^N$ with those on their duals. It always preserves the holonomicity, however does not preserve the regularity in general. In 1986, Brylinski proved that if a regular holonomic $\mathcal{D}$-module is monodromic then its Fourier transform is again monodromic and regular holonomic. Namely the monodromicity is a sufficient condition for preserving the regularity. So that I consider the following problems.

I What is a necessary and sufficient condition for preserving the regularity.

II How the irregularities of the Fourier transform of regular holonomic $\mathcal{D}$-modules are described.

I proved the following results about these problems (this is a joint work with K. Takeuchi, [2], [3]).

Problem (I)

First, we proved that the Fourier transform $\mathcal{M}^\wedge$ of a regular holomomic $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ is monodromic in general. As a corollary of the first result, we proved that if $\mathcal{M}^\wedge$ is again regular holonomic then $\mathcal{M}$ is monodromic. This result is the converse of Brylinski's theorem. Therefore this result and Brylinski's theorem mean that the monodromicity is a necessary and sufficient condition for preserving the regularity. Moreover we reproved the Brylinski's theorem by using the irregular Riemann-Hilbert theorem of D'Agnolo-Kashiwara.

Problem (II)

We showed that the enhanced solution complex of the Fourier transform $\mathcal{M}^\wedge$ of a regular holonomic $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ is isomorphic to the direct sum of some basic enhanced ind-sheaves. Thanks to this formula, we obtained the following results. (i)The restriction of $\mathcal{M}^\wedge$ to $\mathbb{C}^*$-conic Zariski open subset Ω of the dual space Y, which depends on the characteristic variety of $\mathcal{M}$, is an integrable connection. Namely, $\mathcal{M}^\wedge$ does not have singularities in Ω. (ii)$\mathcal{M}^\wedge$ has a regular singularity (resp. an irregular singularity) at 0 (resp. ∞) along any complex line passing through a nonzero point of Ω. (iii)$\mathcal{M}^\wedge$

has irregular singularities along generic normal slice of $Y \setminus \Omega$. Moreover, we obtained the exponential factors appearing in the Hukuhara-Levelt-Turrittin decomposition of $\mathcal{M}^\wedge$ at the irregular points.

B. 発表論文

1. Y. Ito: "Ind-$\mathscr{D}$-加群について–連接性と増大度付き Cauchy-Kovalevskaya-柏原の定理–", 東京大学修士論文, 2017.

2. Y. Ito and K. Takeuchi : "On Irregularities of Fourier Transforms of Regular Holonomic D-Modules", preprint, arXiv:1801.07444.

3. Y. Ito and K. Takeuchi : "On Some Topological Properties of Fourier Transform of Regular Holonomic $\mathcal{D}$-modules", preprint, arXiv:1807.09147.

C. 口頭発表

1. 層とコホモロジー, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 玉原セミナーハウス, 2015 年 8 月.

2. The Riemann-Hilbert correspondence for Holonomic systems (柏原 1984) の紹介, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 玉原セミナーハウス, 2016 年 8 月.

3. A note on Coherent Ind-$\mathcal{D}$-modules and Cauchy-Kovalevskaya-Kashiwara Theorem with growth conditions, Algebraic Analysis and Representation Theory – In honor of Professor Masaki Kashiwara's 70th Birthday –, RIMS, Kyoto University, Japan, poster session, June 2017.

4. 論文「Equivariant Derived Category and Representation of Real Semisimple Lie Groups (柏原 2008)」の紹介, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 玉原セミナーハウス, 2017 年 8 月.

5. regular holonomic D-module の Fourier 変換の irregularity について, 複素領域における関数方程式とその周辺, 広島大学, 2018 年 3 月.

6. 論文「N.M.Katz and G.Laumon, Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles, 1985」の紹介, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 玉原セミナーハウス, 2018 年 8 月.

7. Fourier transforms of regular holonomic D-modules in higher dimensions, D-modules, quantum geometry and related topics, RIMS, Kyoto University, Japan, poster session, December 2018.

8. Fourier Transforms of Regular Holonomic D-Modules in Higher Dimensions I, Hypergeometric functions and mirror symmetry, The University of Tokyo, Japan, December 2018.

9. Fourier Transforms of Regular Holonomic D-Modules in Higher Dimensions II, Hypergeometric functions and mirror symmetry, The University of Tokyo, Japan, December 2018.

D. 講義

E. 修士・博士論文

F. 対外研究サービス

G. 受賞

H. 海外からのビジター

連携併任講座