

協力研究員 (Associate Fellows)

中濱 良祐 (NAKAHAMA Ryosuke)

### A. 研究概要

私は最近の研究で、正則離散系列表現の解析に関するいくつかの話題について扱った。  $G$  を実簡約リー群としたとき、もしそのリーマン対称空間  $G/K$  が自然な複素構造を持つならば、  $G$  の普遍被覆群  $\tilde{G}$  は正則離散系列表現を持ち、それは  $G/K$  上の  $\tilde{G}$ -同変正則ベクトル束の正則切断の空間の中の、  $G/K$  上の収束する積分で与えられる内積から定まるヒルベルト部分空間上に実現される。さらにもし  $G$  が tube 型、すなわち  $G/K$  がある管状領域  $V + \sqrt{-1}\Omega \subset V^{\mathbb{C}}$  にも微分同相になるならば、正則離散系列表現はラプラス変換を通じて対称錐  $\Omega$  上の二乗可積分空間上にも実現される。

私の第一の研究は、ユークリッド型ジョルダン代数  $V$  上の多変数ベッセル関数に関するものである。一般に  $G$  が tube 型るとき、対応する管状領域の実部  $V$  はユークリッド型ジョルダン代数の構造を持つが、その上の多変数ベッセル関数が Dib (1990) により級数展開を用いて定義された。私はこのベッセル関数の新しい積分表示を求め、それを用いてこの関数の上からの精密な評価を与えた。さらにその応用として、正則離散系列表現に関連するある積分作用素の 1 次元正則半群の核関数が指数減少することを示した。

私の第二の研究は、正則離散系列表現の解析接続に関するものである。一般に、  $G/K$  上の  $\tilde{G}$ -同変ベクトル束は、そのファイバーとなるベクトル空間を固定すると、1 次元の自由度を持つ。そのパラメータを  $\lambda$  とおく。このとき、  $\lambda$  が十分大きい場合には正則切断の空間の  $\tilde{G}$ -不変な内積を定義する積分が収束し、正則離散系列表現を与える。一方  $\lambda$  を小さくするとこの積分は収束しなくなるが、それでも正則切断の空間内のユニタリ部分表現が存在する場合がある。私は Faraut-Korányi (1990) によるスカラー型正則離散系列表現の再生核の計算の結果に倣い、ベクトル値正則離散系列表現の再生核の展開を、  $G$  が古典型でその  $K$ -タイプ分解が無重複のときに具体的に計算し、これを用いてユニタリ部分表現が存在する  $\lambda$  を具体的に決定した。これは Enright-Howe-Wallach (1983) および Jakobsen (1983) によるユニタリ最高ウェイト表現の分類の結果の一部に解析的な別証明を与えたことに

なる。

私の第三の研究は、正則離散系列表現を部分群に制限したときの分岐則に関するものである。一般に  $(G, G_1)$  を正則型の対称対、すなわちリーマン対称空間の埋め込み写像  $G_1/K_1 \hookrightarrow G/K$  が正則写像となる対称対のとき、  $G$  の任意の正則離散系列表現は  $G_1$  に制限すると離散分解し、その重複度は一様有界になることが知られている (小林, 2007)。私は  $G_1$  の正則離散系列表現  $\mathcal{H}_1$  から  $G$  の正則離散系列表現  $\mathcal{H}$  の  $G_1$ -同変な埋め込み写像を、  $\mathcal{H}$  がスカラー型、  $\mathcal{H}_1$  が極大コンパクト部分群の下で無重複という仮定の下で (ただし一部系列を除く)、無限解微分作用素の形で具体的に構成した。

In my recent study I treated some topics on analysis of holomorphic discrete series representations. Let  $G$  be a real reductive Lie group. Then if its Riemannian symmetric space  $G/K$  has the natural complex structure, then the universal covering group  $\tilde{G}$  of  $G$  admits a holomorphic discrete series representation, and it is realized on the Hilbert space of holomorphic sections of a  $\tilde{G}$ -equivariant holomorphic vector bundle on  $G/K$ , which is determined from an inner product defined by a converging integral on  $G/K$ . Moreover if  $G$  is of tube type, namely, if  $G/K$  is also diffeomorphic to a tube domain  $V + \sqrt{-1}\Omega \subset V^{\mathbb{C}}$ , then the holomorphic discrete series representation is also realized on the square-integrable space on the symmetric cone  $\Omega$  via the Laplace transform.

My first study is about the multivariate Bessel functions on Euclidean Jordan algebras  $V$ . In general, when  $G$  is of tube type, the real part  $V$  of the corresponding tube domain has an Euclidean Jordan algebra structure, and Dib (1990) defined the multivariate Bessel function on  $V$  by using series expansion. I found new integral expression of this Bessel function, and by using this I gave a sharp upper estimate of this function. Moreover as an application, I showed that the kernel functions of a 1-dimensional holomorphic semigroup consisting of integral operators have exponential decay, where this semigroup is related to the holomorphic discrete series representation.

My second study is about the analytic continuation of holomorphic discrete series representations. In general,  $\tilde{G}$ -equivariant vector bundles on  $G/K$  have a 1-dimensional degree of freedom, when we fix the typical fiber. We denote the parameter by  $\lambda$ . Then if  $\lambda$  is sufficiently large, the integral defining the  $\tilde{G}$ -invariant inner product on the space of holomorphic sections converges, and this gives the holomorphic discrete series representation. On the other hand, if  $\lambda$  is small, then this integral does not converge, but sometimes there exists a unitary subrepresentation in the space of holomorphic sections. Following the result of Faraut-Korányi (1990) on computation of reproducing kernels of holomorphic discrete series representations of scalar type, I explicitly computed the expansion of reproducing kernels of vector-valued holomorphic discrete series representations in the case  $G$  is classical and its  $K$ -type is multiplicity-free, and using this I determined for which  $\lambda$  there exists a unitary subrepresentation. Namely, I gave an analytical proof for a part of the result of Enright-Howe-Wallach (1983) and Jakobsen (1983) on the classification of unitary highest weight modules.

My third study is about the branching laws of the restriction of the holomorphic discrete series representations to subgroups. In general, let  $(G, G_1)$  be a symmetric pair of holomorphic type, namely, a symmetric pair such that the embedding map  $G_1/K_1 \hookrightarrow G/K$  of Riemannian symmetric spaces is a holomorphic map. Then it is known that the restriction of arbitrary holomorphic discrete series representation to  $G_1$  decomposes discretely, and its multiplicity is uniformly bounded (Kobayashi, 2007). I constructed the  $G_1$ -equivariant embedding map from a holomorphic discrete series representation  $\mathcal{H}_1$  of  $G_1$  into a holomorphic discrete series representation  $\mathcal{H}$  of  $G$  in the form of infinite-order differential operators, under the assumption that  $\mathcal{H}$  is of scalar type and  $\mathcal{H}_1$  is multiplicity-free under the maximal compact subgroup of  $G_1$  (but except for some series).

B. 発表論文

1. R. Nakahama, *Intertwining operators between holomorphic discrete series representations*. 実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集 (編集者: 示野 信一 (関西学院大学), 松岡 勝男 (日本大学)) (2016), 45–60.
2. R. Nakahama, *Norm computation and analytic continuation of vector valued holomorphic discrete series representations*. J. Lie Theory **26** (2016), no. 4, 927–990.
3. R. Nakahama, *Some topics on analysis of holomorphic discrete series representations* (正則離散系列表現の解析に関するいくつかの話題). 学位論文 (2016), 東京大学.
4. R. Nakahama, *Norm computation and analytic continuation of vector-valued holomorphic discrete series representations*. 数理解析研究所講究録 **1977**, 表現論および関連する調和解析と微分方程式 (編集者: 竹村 剛一 (中央大学)) (2015), 91–108.
5. R. Nakahama, *The action of 1-dimensional holomorphic semigroups for functions on symmetric cones and the Bessel functions*. 数理解析研究所講究録 **1877**, 表現論および表現論の関連する諸分野の発展 (編集者: 笹木 集夢 (東海大学)) (2014), 88–103.
6. R. Nakahama, *Norm computation and analytic continuation of vector-valued holomorphic discrete series representations*. 表現論シンポジウム講演集 (編集者: 松澤淳一 (奈良女子大学), 示野信一 (関西学院大学)) (2014), 17–28.
7. R. Nakahama, *Integral formula and upper estimate of  $I$  and  $J$ -Bessel functions on Jordan algebras*. J. Lie Theory **24** (2014), no. 2, 421–438.
8. R. Nakahama, *Norm computation and analytic continuation of holomorphic discrete series*. 表現論シンポジウム講演集 (編集者: 小木曾 岳義, 飯田 正敏 (城西大学)) (2013), 71–79.
9. R. Nakahama, *Analysis of generalized Fock spaces on Jordan pairs* (ジョルダン対上

の一般化フォック空間の解析). 修士論文 (2013), 東京大学.

C. 口頭発表

1. *Norm computation and analytic continuation of vector-valued holomorphic discrete series representations*, Harmonic analysis forum (世話人: 吉野 邦生 (東京都市大学)), 東京都市大学, 2017 年 2 月.
2. *Intertwining operators between holomorphic discrete series representations*, 2016 年度ワークショップ「表現論と微分方程式」(世話人: 井沼 学, 大島 利雄, 小木曾 岳義, 廣惠 一希 (城西大学)), 城西大学, 2016 年 11 月.
3. *Intertwining operators between holomorphic discrete series representations*, 実函数論・函数解析学合同シンポジウム (開催責任者: 示野 信一 (関西学院大学), 松岡 勝男 (日本大学)), 首都大学東京, 2016 年 9 月.
4. *Laguerre semigroups for functions on symmetric cones and the Bessel functions*, 調和解析セミナー (世話人: 吉野 邦生 (東京都市大学)), 東京都市大学, 2016 年 3 月.
5. *Explicit embeddings of holomorphic discrete series representations*, 日本数学会年会, 筑波大学, 2016 年 3 月.
6. *Intertwining operators between holomorphic discrete series representations*, Geometry, Representation Theory, and Differential Equation (研究代表者: 大島 利雄 (城西大学)), 九州大学, 2016 年 2 月.
7. *Laguerre semigroups for functions on symmetric cones and the Bessel functions*, 日本数学会秋季総合分科会, 京都産業大学, 2015 年 9 月.
8. ベクトル値正則離散系列表現のノルム計算と解析接続, RIMS 研究集会「表現論および関連する調和解析と微分方程式」(研究代表者: 竹村 剛一 (中央大学)), 京都大学数理解析研究所, 2015 年 6 月.
9. *Norm computation and analytic continuation of vector valued holomorphic discrete*

*series representations*, AGU workshop on geometry and representation theory (世話人: 西山 享 (青山学院大学)), 青山学院大学, 2015 年 5 月.

10. *Laguerre semigroups and Bessel functions on symmetric cones*, Hypergeometric Functions and Representation Theory, CIMPA Research School 2013 (student session), モンゴル日本センター (モンゴル), 2013 年 8 月.

D. 講義 (学生さんは記入されなくてもよい。)

E. 修士・博士論文 (学生さんは記入されなくてもよい。)

F. 対外研究サービス

G. 受賞

H. 海外からのビジター  
連携併任講座