博士課程学生 (Doctoral Course Students)
森田 陽介 (MORITA Yosuke)

(学振 DC1)
(FMSP コース生)

A. 研究概要

等質空間 G/H の開集合を G の作用で貼り合わせて得られる空間 M のことを, G/H を局所的なモデルとする多様体という. 例えば G の離散部分群 Γ が G/H に固有かつ自由に作用するとき (または同値なことであるが, 射影 $G/H \to \Gamma\backslash G/H$ が主 Γ-束になるとき), $\Gamma\backslash G/H$ は G/H を局所的なモデルとする多様体になる. このとき $\Gamma\backslash G/H$ を Clifford–Klein 形, Γ を G/H の不連続群という. M が G/H を局所的なモデルとする多様体のとき, G/H 上の G-不変微分形式を各開集合に制限して G の元の左移動で貼り合わせることで $\eta : \Omega(G/H)^G \to \Omega(M)$ という準同型が定まる. これはコホモロジー間の準同型 $\eta : H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \to H^\bullet(M; \mathbb{R})$ を誘導する. この準同型 η から, 与えられた等質空間 G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体が存在するための障害が幾つか得られることが知られている.

以前の研究で, 簡約型等質空間 G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体が存在するためには, Lie 環の相対コホモロジーの間の準同型 $i : H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \to H^\bullet(\mathfrak{g}, K_H; \mathbb{R})$ が単射でなければならないことが分かっていた (論文 [1]). 本年度の研究では, この準同型 i が単射になるための簡単な必要十分条件を不変式論の言葉で与えた. 証明には, Lie 環の相対コホモロジー $H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R})$ が Weil 代数の転入写像から定まる pure Sullivan 代数のコホモロジー $H^\bullet(\Lambda P_{\mathfrak{g}^*} \otimes (S\widetilde{\mathfrak{h}^*})^H, -\delta_{\widetilde{\tau_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}}})$ に同型である, という H. Cartan, C. Chevalley, J.-L. Koszul, A. Weil らの結果を用いる. 応用として, 小林俊行が 1989 年に述べた「$\operatorname{rank} G - \operatorname{rank} K < \operatorname{rank} H - \operatorname{rank} K_H$ を満たす簡約型等質空間 G/H はコンパクトな Clifford–Klein 形を持たない」という予想の証明が得られた.

A manifold M is said to be locally modelled on a homogeneous space G/H if it is covered by open sets that are diffeomorphic to open sets of G/H and their transition functions are locally in G. For instance, if a discrete subgroup Γ of G acts properly and freely on G/H (or equivalently, if the projection $G/H \to \Gamma\backslash G/H$ is a principal Γ-bundle), then $\Gamma\backslash G/H$ becomes a manifold locally modelled on G/H. In this case, $\Gamma\backslash G/H$ is called a Clifford–Klein form and Γ a discontinuous group for G/H. If M is a manifold locally modelled on a homogeneous space G/H, we can define a differential graded algebra homomorphism $\eta : \Omega(G/H)^G \to \Omega(M)$ by patching G-invariant differential forms on open sets of G/H by left translations by elements of G. This induces a homomorphism $\eta : H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \to H^\bullet(M; \mathbb{R})$. The homomorphism η gives some obstructions to the existence of a compact manifold locally modelled on a given homogeneous space G/H.

I have previously proved that there exists a compact manifold locally modelled on a homogeneous space G/H of reductive type only when the homomorphism of relative Lie algebra cohomologies $i : H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \to H^\bullet(\mathfrak{g}, K_H; \mathbb{R})$ is injective ([1]). In this academic year, I gave a necessary and sufficient condition for the injectivity of this homomorphism i. The condition is written in terms of invariant theory and is easy to verify. The proof is based on a result of H. Cartan, C. Chevalley, J.-L. Koszul and A. Weil that gives an isomorphism between relative Lie algebra cohomology $H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R})$ and the cohomology $H^\bullet(\Lambda P_{\mathfrak{g}^*} \otimes (S\widetilde{\mathfrak{h}^*})^H, -\delta_{\widetilde{\tau_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}}})$ of a pure Sullivan algebra defined from a transgression in the Weil algebra. As an application, the following result is obtained: a homogeneous space G/H of reductive type does not admit a compact Clifford–Klein form if $\operatorname{rank} G - \operatorname{rank} K < \operatorname{rank} H - \operatorname{rank} K_H$. This is conjectured by Toshiyuki Kobayashi in 1989.

B. 発表論文

1. Y. Morita: "A topological necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms", J. Differential Geom. **100** (2015), 533–545.

2. Y. Morita: "Obstructions for the existence of compact manifolds locally modelled on homogeneous spaces", 東京大学修士論文 (2014).

3. Y. Morita: "Semisimple symmetric spaces without compact manifolds locally mod-

elled thereon", Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **91** (2015), 29–33.

4. Y. Morita: "Homogeneous spaces of nonreductive type locally modelling no compact manifold", arXiv:1508.04862, to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.

5. Y. Morita: "A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford-Klein forms", Selecta Math. (N.S.), DOI: 10.1007/s00029-016-0295-1 (online first publication).

6. Y. Morita: "A cohomological study of the existence problem of compact Clifford–Klein forms", 東京大学博士論文 (2017).

C. 口頭発表

1. コンパクト Clifford–Klein 形の存在問題について. 2015 年度表現論シンポジウム, 公共の宿おおとり荘, 2015 年 11 月.

2. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms. Berkeley–Tokyo Winter School "Geometry, Topology and Representation Theory" (Student Session), University of California, Berkeley, USA, 2016 年 2 月.

3. 等質空間を局所モデルとするコンパクト多様体が存在するための障害. 日本数学会 2016 年度年会 (幾何学分科会, 一般講演), 筑波大学, 2016 年 3 月.

4. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms. Geometric Analysis on Discrete Groups, 京都大学, 2016 年 5 月.

5. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms. Geometry and Topology Seminar, University of Luxembourg, Luxembourg, 2016 年 6 月.

6. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms. Rigidity School, Nagoya 2016, 名古屋大学, 2016 年 7 月.

7. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms. 第 63 回幾何学シンポジウム, 岡山大学, 2016 年 8 月.

8. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms. Group Actions and Dynamics Seminar, Yale University, USA, 2016 年 9 月.

9. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms. International Conference for the 70th Anniversary of Korean Mathematical Society (Session: Geometric Group Theory and Dynamics of Group Actions), Seoul National University, South Korea, 2016 年 10 月.

10. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms. 2016 年度表現論シンポジウム, オキナワグランメールリゾート, 2016 年 11 月.

G. 受賞

1. 理学部学修奨励賞 (2012).
2. 東京大学総長賞 (2012).
3. 数理科学研究科長賞 (2014).