博士課程学生 (Doctoral Course Students)
大矢 浩徳 (OYA Hironori)
(学振 DC2)
(FMSP コース生)

A. 研究概要

本年度は捻り写像 (twist map) と呼ばれる冪単部分群, 冪単胞体の座標環の同型写像の量子類似を, 双対標準基底との関連から研究した．冪単部分群, 冪単胞体とは半単純代数群のある部分代数多様体であり, これらの座標環の量子類似は De Concini, Kac, Procesi らにより導入されている．双対標準基底とはこれらの量子座標環における特別な基底であり, 特にその積構造は量子座標環のみならず圏化を介して他の数学的対象の “構造” を反映する対象として深く調べられてきた．本研究の目的は, 非自明な代数写像である捻り写像を双対標準基底の積構造の対称性を見る道具とするために, まずそれらと双対標準基底との整合性を調べることにある．捻り写像としては 2 種類, “Fomin-Zelevinsky 型” のもの (FZ 捻り写像と呼ぶ) と “Berenstein-Fomin-Zelevinsky 型” のもの (BFZ 捻り変換と呼ぶ) を扱った．なお, 前者は冪単部分群の座標環の間の同型であり, 後者は冪単胞体の座標環の自己同型である．以下が本年度得られた成果である．

(1) Lenagan-Yakimov により導入された FZ 捻り写像の量子類似が双対標準基底の間の全単射を導くことの証明．および, 量子 FZ 捻り写像によるある種の量子冪単小行列式の像の具体的な記述．(木村嘉之氏との共同研究)

(2) 一般の冪単胞体の座標環の量子類似における BFZ 捻り変換の類似の構成, およびそれが双対標準基底を保つことの証明. (木村嘉之氏との共同研究)

(3) Geiß-Leclerc-Schröer は (量子でない)BFZ 変換を彼らの加法的圏化を用いて記述したが, (2) で構成した量子 BFZ 捻り変換もその記述の量子類似を持つことの証明．特に, 量子 BFZ 捻り変換が量子団単項式を保つことの証明. (木村嘉之氏との共同研究)

(4) 量子 BFZ 捻り変換を用いた Chamber Ansatz 型公式の導出.

以上の内容は博士論文としてまとめた.

さらに藤田直樹氏と共同で Schubert 多様体の Newton-Okounkov 凸体について研究を行った. Schubert 多様体の Newton-Okounkov 凸体はその非常に豊富な直線束と, 関数体の付値を与えることにより定まる凸体であり代数的, 幾何的情報を持っている．本研究ではある 2 種類の異なる付値から定まる Newton-Okounkov 凸体が本質的に同じものである (具体的なアフィン変換で移りあう) ことを証明した.

From the basis-theoretic viewpoint, I have studied quantum analogues of the isomorphisms, called the twist maps, between the coordinate algebras of unipotent subgroups or unipotent cells. Unipotent subgroups and unipotent cells are subvarieties of a semisimple algebraic group, and quantum analogues of the coordinate algebras of these varieties have been introduced by De Concini, Kac and Procesi. There are specific bases of these quantized coordinate algebras, called the dual canonical bases. The dual canonical bases have attracted a lot of attention because they reflect “structures” of other mathematical objects via categorification. The main aim of this research is to study the compatibility between the quantum analogues of twist maps and the dual canonical bases in order to use these maps as tools for investigating the “symmetries” of the dual canonical bases. I have dealt with two kinds of twist maps, that is, “Fomin-Zelevinsky twist maps (henceforth FZ-twist maps)” and “Berenstein-Fomin-Zelevinsky twist automorphisms (henceforth BFZ-twist automorphisms)”. The FZ-twist maps are isomorphisms between the coordinate algebras of unipotent subgroups and the BFZ-twist automorphisms are automorphisms of the coordinate algebras of unipotent cells. The following are our main results obtained in this research.

(1) The quantum FZ-twist maps, defined by Lenagan-Yakimov, give bijections between the dual canonical bases of quantum unipotent subgroups. The images of certain unipotent quantum minors under the quantum FZ-twist maps have been explicitly described. (Joint work with Yoshiyuki

Kimura)

(2) The quantum analogues of BFZ-twist automorphisms on arbitrary quantum unipotent cells are constructed. They induce permutations on the dual canonical bases. (Joint work with Yoshiyuki Kimura)

(3) The quantum BFZ-twist automorphisms, constructed in (2), have the description as a quantum analogue of Geiß-Leclerc-Schröer's presentation of (non-quantum) BFZ-twist automorphisms in terms of additive categorification. In particular, the quantum BFZ-twist automorphisms preserve "quantum cluster monomials". (Joint work with Yoshiyuki Kimura)

(4) The quantum analogues of the "Chamber Ansatz formulae" are obtained by using the quantum BFZ-twist automorphisms.

The above results are summarized as my Ph.D. thesis.
In collaboration with Naoki Fujita, we have studied the Newton-Okounkov bodies of Schubert varieties. A Newton-Okounkov body of a Schubert variety is constructed from a very ample line bundle on it with a valuation on its function field. It is known that the Newton-Okounkov body inherits information about algebraic and geometric properties of a Schubert variety and a very ample line bundle on it. In this research, we have proved that the Newton-Okounkov bodies of a Schubert variety associated with specific two kinds of valuations coincide through an explicit affine transformation.

B. 発表論文

1. H.Oya: "The Chamber Ansatz for quantum unipotent cells", preprint arXiv:1702.00383, submitted.
2. Y.Kimura and H.Oya: "Twist automorphisms on Quantum unipotent cells and Dual canonical bases", preprint arXiv:1701.02268, submitted.
3. N.Fujita and H.Oya: "A comparison of Newton-Okounkov polytopes of Schubert varieties", preprint arXiv:1610.08783, submitted.
4. Y.Kimura and H.Oya: "Quantum twist maps and dual canonical bases", preprint arXiv:1604.07748, submitted.
5. H.Oya: "Representations of quantized coordinate algebras via PBW-type elements", Osaka J. Math., to appear.
6. H.Oya: "A naive construction of irreducible representations of the quantized function algebra $\mathbb{C}[SL_n]_v$", 東京大学修士論文 (2014).

C. 口頭発表

1. Twist maps on quantum unipotent cells and the Chamber Ansatz, Oberseminar Algebra, ケルン大学, ドイツ, 2016 年 10 月.
2. Quantum twist maps and dual canonical bases, 表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題, RIMS, 2016 年 6 月.
3. Quantum twist maps and dual canonical bases, 第 4 回つくばフレッシュマンセミナー, 筑波大学, 2016 年 6 月.
4. On some reducible representations of the quantized coordinate algebras, 第 21 回代数学若手研究会, 奈良女子大学, 2016 年 3 月.
5. Representations of quantized coordinate algebras via PBW-type elements, 神戸可積分系セミナー, 神戸大学, 2016 年 1 月.
6. Representations of quantized function algebras and the transition matrices from Canonical bases to PBW bases, 第 3 回つくばフレッシュマンセミナー, 筑波大学, 2015 年 7 月.
7. Representations of quantized function algebras and the transition matrices from Canonical bases to PBW bases, Algebraic Lie theory and Representation theory 2015, 岡山いこいの村, 2015 年 6 月.

8. The representations of quantized function algebras and the transition matrices between Canonical bases and PBW bases, 日本数学会 2015 年度年会, 明治大学, 2015 年 3 月.

9. A construction of irreducible representations of the quantized function algebra $\mathbb{C}[SL_n]_v$, 第 17 回代数群と量子群の表現論 (RAQ2014), 一般財団法人 富山勤労総合福祉センター呉羽ハイツ, 2014 年 6 月.

10. 量子座標環 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の既約表現の素朴な構成について, 第 19 回代数学若手研究会, 信州大学, 2014 年 2 月.

G. 受賞

数理科学研究科長賞 (2013 年度)