博士課程学生 (Doctoral Course Students)
中濱 良祐 (NAKAHAMA Ryosuke)
(学振 DC1)
(FMSP コース生)

A. 研究概要

私は今年度，昨年度に引き続きエルミート型単純リー群の正則離散系列表現を解析接続する研究を行った．

まず，G をエルミート型単純リー群，すなわち，その極大コンパクト部分群 K が離散でない中心 $Z(K)$ を持つとする．このとき，G のリー環の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は，$Z(K)$ の随伴作用の下で，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{p}^{+}\oplus\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{p}^{-}$ と固有空間分解される．この分解を用いると，埋め込み $G/K\to G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}P^{-}\leftarrow\exp(\mathfrak{p}^{+})$ を通して，G/K がある有界領域 $D\subset\mathfrak{p}^{+}$ と自然に微分同相になることがわかる．

さて，(τ,V) を K の既約表現，$\chi_{-\lambda}$ を普遍被覆群 $\tilde{K}$ の一次元表現とすると，G の普遍被覆群 $\tilde{G}$ が正則ベクトル束 $G\times_{K}(V\otimes\chi_{-\lambda})\to G/K$ の正則切断の空間に作用する．ここで $G/K\simeq D$ は可縮なので，この空間は D 上の V 値正則関数の空間 $\mathcal{O}(D,V)$ と自然に同一視できる．さらに，パラメータ λ が十分大きい場合には，$\tilde{G}$ の作用は D 上の積分で定義されるある内積を不変にする．したがってこの作用のノルム有限な関数たち $\mathcal{H}_{\lambda}(D,V)$ への制限はユニタリ表現となる．これは正則離散系列表現と呼ばれる．

一方 λ が小さい場合，内積を定義する積分は収束しない．しかし，λ が大きい場合にこの内積は λ に解析的に依存するので，小さい λ に対してもこれを解析接続できる．したがってこの解析接続された内積が正定値ならば，$\mathcal{H}_{\lambda}(D,V)$ はユニタリ表現となる．Faraut-Korányi (1990) は (τ,V) が自明の場合，すなわちスカラー型正則離散系列表現の場合にこの内積（より正確には，各 K-不変部分空間上での，このノルム $\|\cdot\|_{\lambda}$ と λ に依存しない K-不変ノルム $\|\cdot\|_{F}$ の比）を具体的に計算し，いつ表現がユニタリ化可能となるか具体的に決定した．

この計算は，表現を K に制限した時の重複度が 1 以下であれば，スカラー型でなくても意味を持つ．私は最近の研究で，上の Faraut-Korányi の結果を G が古典型で K-重複度自由の場合に一般化した．つまり，例えば $G=Sp(r,\mathbb{R})$, $V=\bigwedge^{k}(\mathbb{C}^{r})$ (外積代数), あるいは $G=SO^{*}(2s)$, $V=S^{k}(\mathbb{C}^{s}),S^{k}((\mathbb{C}^{s})^{\vee})$ (対称代数またはその双対) などの場合に表現 $\mathcal{O}(D,V)$ は K-重複度自由となり，このような場合に $\mathcal{H}_{\lambda}(D,V)$ の内積を具体的に計算し，λ が小さいときにいつユニタリ化可能となるかを具体的に決定した．

This year, continuing from last year, I studied the analytic continuation of the holomorphic discrete series representation of Hermitian simple Lie groups.

Suppose that G is a Hermitian simple Lie group, that is, its maximal compact subgroup K has a non-discrete center $Z(K)$. Then $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, the complexification of the Lie algebra of G, is decomposed into eigenspaces under the adjoint action of $Z(K)$, as $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{p}^{+}\oplus\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{p}^{-}$. Using this decomposition, we can construct a natural diffeomorphism between G/K and some bounded domain $D\subset\mathfrak{p}^{+}$, through the embedding $G/K\to G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}P^{-}\leftarrow\exp(\mathfrak{p}^{+})$.

Now, let (τ,V) be an irreducible representation of K, and $\chi_{-\lambda}$ be a 1-dimensional representation of the universal covering group $\tilde{K}$. Then $\tilde{G}$, the universal covering group of G, acts on the space of holomorphic sections of the holomorphic vector bundle $G\times_{K}(V\otimes\chi_{-\lambda})\to G/K$. Since $G/K\simeq D$ is contractible, this space can be identified with $\mathcal{O}(D,V)$, the space of V-valued holomorphic functions on D. Moreover, if the parameter λ is sufficiently large, then the $\tilde{G}$-action preserves some inner product defined by an integral on D. Therefore its restriction to the space of functions with finite norms $\mathcal{H}_{\lambda}(D,V)$ gives a unitary representation. These are called the holomorphic discrete series representations.

On the other hand, if λ is small, then the integral defining the inner product does not converge. However, since this inner product depends analytically on λ when λ is large, we can consider the analytic continuation for smaller λ. Therefore if this analytically-continued inner product is positive definite, then $\mathcal{H}_{\lambda}(D,V)$ gives a unitary representation. For the case of holomorphic discrete series of scalar-type i.e. when (τ,V) is a trivial representation, Faraut-Korányi (1990) determined explicitly for which λ the representation is unitarizable, by computing explicitly this inner product (more pre-

cisely, the ratio of this norm $\|\cdot\|_\lambda$ and the λ-independent K-invariant norm $\|\cdot\|_F$ on each K-invariant subspace).
This computation is also valid if the multiplicity of the representation is at most 1 when restricted to K, even if it is not of scalar type. In my recent study, I generalized the above result of Faraut-Korányi to the case when G is a classical group and the representation is K-multiplicity-free. That is, for example, when $G = Sp(r,\mathbb{R})$ and $V = \bigwedge^k(\mathbb{C}^r)$ (the exterior algebra), or $G = SO^*(2s)$ and $V = S^k(\mathbb{C}^s), S^k((\mathbb{C}^s)^\vee)$ (symmetric algebra or its dual), the representation $\mathcal{O}(D,V)$ becomes K-multiplicity-free, and in such cases I computed the inner product of $\mathcal{H}_\lambda(D,V)$ explicitly, and determined when it is unitarizable for small λ.

B. 発表論文

1. R. Nakahama: "Integral formula and upper estimate of I and J-Bessel functions on Jordan algebras", J. Lie Theory **24** (2014), No. 2, 421–438.

2. R. Nakahama: "Analysis of generalized Fock spaces on Jordan pairs" (ジョルダン対上の一般化フォック空間の解析), 修士論文.

C. 口頭発表

1. 1 次元正則半群の対称錐上の関数への作用と Bessel 関数, RIMS 研究集会「表現論および表現論の関連する諸分野の発展」, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 6 月.

2. Laguerre semigroups and Bessel functions on symmetric cones, Hypergeometric Functions and Representation Theory, CIMPA Research School 2013 (student session), モンゴル日本センター (モンゴル), 2013 年 8 月.

3. Norm computation and analytic continuation of holomorphic discrete series, 表現論シンポジウム, マホロバ・マインズ三浦 (神奈川県), 2013 年 11 月.

4. Norm computation and analytic continuation of vector-valued holomorphic discrete series representations, 表現論シンポジウム, 夢海游淡路島 (兵庫県), 2014 年 11 月.

5. 正則離散系列表現のノルム計算と解析接続, 日本数学会年会, 明治大学, 2015 年 3 月 (見込).

D. 講義 (学生さんは記入されなくてもよい。)

E. 修士・博士論文 (学生さんは記入されなくてもよい。)

F. 対外研究サービス

G. 受賞