学振特別研究員 (JSPS Fellow)
博士課程学生 (Doctoral Course Student)
中濱 良祐 (NAKAHAMA Ryosuke)
(学振 DC1)
(FMSP コース生)

A. 研究概要

私は今年度，エルミート型単純リー群の正則離散系列表現を解析接続する研究を行った．
まず，G をエルミート型単純リー群，すなわち，その極大コンパクト部分群 K が離散でない中心 $Z(K)$ を持つとする．このとき，G のリー環の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は，$Z(K)$ の随伴作用の下で，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{p}^+\oplus\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{p}^-$ と固有空間分解される．この分解を用いると，埋め込み $G/K\to G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}P^-\leftarrow\exp(\mathfrak{p}^+)$ を通して，G/K がある有界領域 $D\subset\mathfrak{p}^+$ と自然に微分同相になることがわかる．
さて，(τ,V) を K の既約表現，$\chi_{-\lambda}$ を普遍被覆群 $\tilde{K}$ の一次元表現とすると，G の普遍被覆群 $\tilde{G}$ が正則ベクトル束 $G\times_K(V\otimes\chi_{-\lambda})\to G/K$ の正則切断の空間に作用する．ここで $G/K\simeq D$ は単連結なので，この空間は D 上の V 値正則関数の空間 $\mathcal{O}(D,V)$ と自然に同一視できる．さらに，パラメータ λ が十分大きい場合には，$\tilde{G}$ の作用は D 上の積分で定義されるある内積を不変にする．したがってこの作用のノルム有限な関数たち $\mathcal{H}_\lambda(D,V)$ への制限はユニタリ表現となる．これは正則離散系列表現と呼ばれる．
一方 λ が小さい場合，内積を定義する積分は収束しない．しかし，λ が大きい場合にこの内積は λ に解析的に依存するので，小さい λ に対してもこれを解析接続できる．したがってこの解析接続された内積が正定値ならば，$\mathcal{H}_\lambda(D,V)$ はユニタリ表現となる．Faraut-Korányi (1990) は (τ,V) が自明の場合，すなわちスカラー型正則離散系列表現の場合にこの内積（より正確には，各 K-不変部分空間上での，このノルム $\|\cdot\|_\lambda$ と λ に依存しない K-不変ノルム $\|\cdot\|_F$ の比）を具体的に計算し，いつ表現がユニタリ化可能となるか具体的に決定した．
私は今年度の研究でこの結果をより一般の K の表現 (τ,V) に対して一般化した．つまり，(τ,V) が K のある部分群 K_L に制限しても既約のままであるという仮定の下で，$\mathcal{H}_\lambda(D,V)$ の内積を具体的に計算し，λ が小さいときにいつユニタリ化可能となるかを具体的に決定した．この仮定は，例えば $G=Sp(r,\mathbb{R})$ の場合には $V=\bigwedge^k(\mathbb{C}^r)$ (外積代数）のとき，$G=SO^*(4r)$ の場合には $V=S^k(\mathbb{C}^r),S^k((\mathbb{C}^r)^\vee)$ (対称代数またはその双対）のときに満たされ，特にこれらの場合には内積が具体的に分かったことになる．

This year, I studied the analytic continuation of the holomorphic discrete series representation of Hermitian simple Lie groups.
Suppose that G is a Hermitian simple Lie group, that is, its maximal compact subgroup K has a non-discrete center $Z(K)$. Then $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, the complexification of the Lie algebra of G, is decomposed into eigenspaces under the adjoint action of $Z(K)$, as $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{p}^+\oplus\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{p}^-$. Using this decomposition, we can construct a natural diffeomorphism between G/K and some bounded domain $D\subset\mathfrak{p}^+$, through the embedding $G/K\to G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}P^-\leftarrow\exp(\mathfrak{p}^+)$.
Now, let (τ,V) be an irreducible representation of K, and $\chi_{-\lambda}$ be a 1-dimensional representation of the universal covering group $\tilde{K}$. Then $\tilde{G}$, the universal covering group of G, acts on the space of holomorphic sections of the holomorphic vector bundle $G\times_K(V\otimes\chi_{-\lambda})\to G/K$. Since $G/K\simeq D$ is contractible, this space can be identified with $\mathcal{O}(D,V)$, the space of V-valued holomorphic functions on D. Moreover, if the parameter λ is sufficiently large, then the $\tilde{G}$-action preserves some inner product defined by an integral on D. Therefore its restriction to the space of functions with finite norms $\mathcal{H}_\lambda(D,V)$ gives a unitary representation. These are called the holomorphic discrete series representations.
On the other hand, if λ is small, then the integral defining the inner product does not converge. However, since this inner product depends analytically on λ when λ is large, we can consider the analytic continuation for smaller λ. Therefore if this analytically-continued inner product is positive definite, then $\mathcal{H}_\lambda(D,V)$ gives a unitary representation. For the case of holomorphic discrete series of scalar-type i.e. when (τ,V) is a trivial representation, Faraut-Korányi (1990) determined explicitly for which λ the representation is unitarizable, by computing explicitly this inner product (more precisely, the ratio of this norm $\|\cdot\|_\lambda$ and the λ-

independent K-invariant norm $\|\cdot\|_F$ on each K-invariant subspace).

In my study of this year, I generalized this result to more general representation (τ, V) of K. That is, under the assumption that (τ, V) remains irreducible even if restricted to a certain subgroup K_L, I computed the inner product of $\mathcal{H}_\lambda(D, V)$ explicitly, and determined when it is unitarizable for small λ. This assumption is satisfied, for example, when $G = Sp(r, \mathbb{R})$ and $V = \bigwedge^k(\mathbb{C}^r)$ (the exterior algebra), or $G = SO^*(4r)$ and $V = S^k(\mathbb{C}^r), S^k((\mathbb{C}^r)^\vee)$ (symmetric algebra or its dual), and for these cases we can describe the inner product explicitly.

B. 発表論文

1. R. Nakahama: “Integral formula and upper estimate of I and J-Bessel functions on Jordan algebras”, preprint, arXiv: 1211.4702 (to appear in J. Lie Theory **24** (2014), No. 2, 421–438).
2. R. Nakahama: “Analysis of generalized Fock spaces on Jordan pairs” (ジョルダン対上の一般化フォック空間の解析), 修士論文.

C. 口頭発表

1. 1 次元正則半群の対称錐上の関数への作用と Bessel 関数, RIMS 研究集会「表現論および表現論の関連する諸分野の発展」, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 6 月.
2. Norm computation and analytic continuation of holomorphic discrete series, 表現論シンポジウム, マホロバ・マインズ三浦, 2013 年 11 月.

D. 講義

E. 修士・博士論文

F. 対外研究サービス

G. 受賞