日　本　数　学　会

1989 年度秋季総合分科会

函数解析学分科会
講演アブストラクト

1989年 9 月

於　上　智　大　学

特II．等質ベクトル束上の調和解析と
半単純リー群のユニタリ表現

小林俊行　　東大・理

§1、(非可換)調和解析と表現論

一般線型リー群 $GL(n,\mathbb{R})$ の(連結)な閉部分群 G は、転置に関して閉じているとき、簡約線型リー群と呼ばれる。$K := G \cap SO(n)$ は G の極大コンパクト部分群である。G のリー環を $\mathfrak{g}_0$，その複素化を $\mathfrak{g}$ とかく。admissible と呼ばれるゆるやかな仮定の下で、G のヒルベルト表現の本質的な部分は、その稠密な部分空間に定義される微分表現である $(\mathfrak{g},K)$ 加群におきかえられる。これは、フーリエ級数において有限三角和のみ扱う事に対応しており、表現論の代数的な研究を可能にする。既約 (resp. 既約ユニタリ) $(\mathfrak{g},K)$ 加群の同値類を $Irr(G)$ (resp. $\widehat{G}$) とかこう。

閉部分群の列 $H \subset G \subset GL(n,\mathbb{R})$ が同時に転置に関して閉じているとき、G/H は簡約型等質空間と呼ばれる。H が G の半単純元の中心化群の場合や、半単純対称空間などは、その典型例である。等質空間 G/H には G 不変な測度が存在し、ヒルベルト空間 $L^2(G/H)$ への左正則表現

はGのユニタリ表現を与える。$L^2(G/H)$は非常に大きな空間で

$$L^2(G/H) \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\sigma)\,\sigma\, d\mu_{G/H}(\sigma)$$

と既約表現の直積分に一意的に展開される。$\hat{G}$上の測度$\mu_{G/H}$をG/HのPlancherel測度、$m: \hat{G} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$を表現の重複度と呼ぶ。点スペクトラムに相当する$\{\sigma \in \hat{G} : \mu_{G/H}(\{\sigma\}) \neq 0\}$は特に重要で$G/H$の離散系列(discrete series)と呼ばれる。

$L^2(G/H)$の展開には$\hat{G}$の元すべてが現れるわけではない。特に群多様体の場合の$\mu_{G/\{e\}}$の台を$\hat{G}_{temp}$と書こう。($\hat{G}_{temp}$の元は緩増加表現といわれ、より精密な定義もある)

$$\mathrm{Irr}(G) \supset \hat{G} \supset \hat{G}_{temp}$$

が定義から従い、Gがコンパクトなら3者は一致する。

表現論、(非可換)調和解析のそれぞれの基本問題として

1. $\hat{G}$の決定(既約ユニタリ表現の分類)
2. $L^2(G/H)$のPlancherelの公式を明確に求める

が古くから考えられてきた。

$\mathrm{Irr}(G)$は、(イ) Langlands, (ロ) Zuckerman-Vogan, (ハ) $\mathcal{D}$-加群による、それぞれ解析、代数、幾何に比重のある分類が知られており、(イ)は、$\hat{G}_{temp}$の分類をみて完結した。しかし、

$\widehat{G}$の分類は、ランクが低い場合や$GL(n,\mathbb{F})$ $(\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H})$や複素古典型等解決が進んできているが、現在なお、アメリカを中心に活発な研究が続けられている。

一方、$L^2(G/H)$のPlancherelの定理は、群多様体に対してHarish-Chandraが解決し、半単純対称空間に対しては今年大島先生がannounceした。

1と2は互いに影響を与えながら発展してきた。Hが非コンパクトの時、$\mathcal{M}_{G/H}$の台と$\widehat{G}_{temp}$には互いに包含関係はなく、例えば半単純対称空間の離散系列は'80年代前半に多くの未知の既約ユニタリ表現を与えた。そのパラメーターはfair (§4)に属しており、現在ではVoganの代数的結果からもユニタリ性が証明できる。

一般の簡約型等質空間に対するPlancherelの定理は、階段定理により、HがGの極大簡約部分群の時のG/H上のベクトル束のL^2切断$L^2(G/H,\tau)$ $(\tau\in\widehat{H})$を知る事ができれば、より精密な形で記述できる。後者の典型例として、以後G/Hは半単純対称空間，$\tau\in\widehat{H}$の場合を扱う。τが有限次元の場合§3で構成した離散系列のパラメーターは上記のVoganの条件を越えうる。微分幾何への応用は§3で触れ、τが無限次元の時有限重複度定理が破れる事は§2で述べる。

§2. τが無限次元既約表現の場合

まだ殆ど研究されていないので、具体例から少しでも方向を見出したい。この節の内容については[K 4]参照。$\tau\in\hat{H}_{temp}$, $G/H = GL(4,\mathbb{R})/GL(2,\mathbb{R})\times GL(2,\mathbb{R})$ 等のいくつかの特別な場合の$L^2(G/H,\tau)$の抽象 Plancherel formula を強引に求める事によって次の事が観察される；

<u>観察</u> 1) $L^2(G/H,\tau)$ の展開において、$\tau\in\hat{H}$が無限次元ならば、$\hat{G}$の元の各重複度は無限になりうる。

2) $\tau\neq\tau'$ であっても、$L^2(G/H,\tau)$と$L^2(G/H,\tau')$がユニタリ同値になる事がしばしば起こる。

$\tau\in\hat{H}_{temp}$の時、実旗多様体G/PのH-開軌道の固定部分群が小さくなると(1)が起こる。(2)は、(具体例では一層強い事が成り立つが)、少くとも次の結果がかなり一般に成立する事を期待させる：簡単のため$G=\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$とすると、「$L^2(G/H,\tau)$ $(\tau\in\hat{H})$は$\hat{H}$の'連続'パラメーターに依存しない。」

§3. τが有限次元既約表現の場合

便宜的に、次の3つの場合にわけて考えよう：

イ) Hはコンパクト $(=K)$。

ロ) Hはコンパクト因子をもたない。

ハ) Hは非コンパクトだが、コンパクト因子をもつ。

(イ)は有限次元表現の問題を除いて$L^2(G)$の場合に帰着され、(ロ)は前節最後に述べた観点から、いずれもユニタリ表現としては面白くない。しかし、(イ)で$L^2(G/K)$には離散系列が存在しないのに反し、$L^2(G/K,\tau)$には有限個の離散系列が存在しうるという事実は、色々な立場からの解釈において重要である。その1つは、(ハ)で$\tau=1$の場合には知られていないタイプの離散系列の存在を示唆している事であり、もう1つは微分幾何で名大の砂田氏が提起した問題「$\pi_1(M)=\infty$なる閉リーマン多様体の普遍被覆空間上のラプラシアンは点スペクトラムを持たないだろう」(数学39-p.239)が成り立たない面白い例を与える事([SOK])である。その他、[K2]に基づく無限次元表現の分岐則の一例が[K4]にある。

ユニタリ表現としては(ハ)が最も面白い場合であり、その離散系列(の一部)がSchlichtkrullと大島-松木[MO]の結果を組合せる事によって構成される([K1], [K3, p3~4])。得られた離散系列はZuckermanの導来加群(ZDF加群;次節参照)で表す事ができる。L^2-評価に必要なパラメーターと$\tau\in\hat{H}$のそれがある程度独立にとれるので、離散系列となるZDF加群のパラメーターは一層特異なものが現れる。これらは、代数的な表現論からも興味深い部分で、次節以降は特異なパラメーターを持つZDF加群の立場から考察しよう。

§4 ZDF加群

$\sqrt{-1}\,\mathfrak{k}_0$ の元 μ を固定すると、G における μ の中心加群 L と、μ を dominant にする $\mathfrak{g}$ の θ-stable 放物型部分代数 $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ が定まる。複素多様体 G/L 上の Delbeault コホモロジーの代数的類似として、Zuckerman は metapletic $(\mathfrak{l}, (L\cap K)^{\sim})$ 加群から、

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{j} : \mathcal{M}(\mathfrak{l}, (L\cap K)^{\sim}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

なる誘導表現を構成した。$\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ をそれぞれ $\mathfrak{l}$ の中心, Cartan 部分代数とする。$Z(\mathfrak{l})$-無限指標 $\gamma \in \mathfrak{t}^*$ をもつ $W \in \mathcal{M}(\mathfrak{l}, (L\cap K)^{\sim})$ に対し、次の用語を定義する

(weakly) good $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\langle \gamma, \alpha\rangle \underset{(\geqq)}{>} 0 \quad ({}^{\forall}\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{t}))$

(weakly) fair $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \mathrm{Re}\langle \gamma|_{\mathfrak{z}}, \alpha\rangle \underset{(\geqq)}{>} 0 \quad ({}^{\forall}\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})) \\ [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \text{ は } W \text{ に自明に作用する.} \end{cases}$

この時、Zuckerman, Vogan により次の定理が知られている。

<u>事実</u> 1) W が weakly good なら、

(a) $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{j}(W) = 0 \quad ({}^{\forall}j \neq S \overset{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}} K/L\cap K)$

(b) W が既約 $\Rightarrow$ $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(W)$ は既約または 0.

(c) W がユニタリ $\Rightarrow$ $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(W)$ もユニタリ化可能.

2) W が good なら、

(d) $W \neq 0 \Rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(W) \neq 0$

3) good を fair におきかえると、(a)(c) は正しく、(b)(d) は不成立。

自然な $\mathfrak{q}$ の選択によって、群多様体(resp. 半単純対称空間)の離散系列は、good (resp. fair) なパラメーターで表せる事が知られているが、前節の $L^2(G/H,\tau)$ の離散系列のパラメーターは、fair でないものを含む事は特に興味深い。$L^2(G/H,\tau)$ に実現されているという解析的な結果からユニタリ化可能であるというような性質が従うが、逆に $L^2(G/H,\tau)$ の離散系列を扱うためには、fair とは限らない ZDF 加群の研究が必要になる。前節(ハ)の典型例である $G/H = U(p,q;\mathbb{F})/U(m;\mathbb{F})\times U(p-m,q;\mathbb{F})$ ($p \geq 2m$, $\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$) の場合に、この様な ZDF 加群のコホモロジーが純次元的になる条件、すべて消えるための判定条件、既約になるための十分条件などが [K3] で調べられた。これらは、代数的な手法で示され、(離散系列とは無関係の)より広い ZDF 加群にも適用できると考えられるため、以下でそのアイディアを紹介しよう。

§5 既約性

$\mathbb{C}_\lambda \in \mathcal{M}(\mathfrak{l},(L\cap K)^\sim)$ が fair でも ZDF 加群 $\mathcal{R}_\mathfrak{q}^S(\mathbb{C}_\lambda)$ は既約とは限らないが、半単純対称空間の離散系列に対応するような特別な ZDF 加群はすべて既約である([V,2])。

$\mathcal{D}$-加群の言葉で考えよう。ねじれ微分作用素への

$$d : U(\mathfrak{g}) \to R_{\lambda+\rho_\mathfrak{l}}(\mathfrak{l}:\mathfrak{g}) \qquad (\rho_\mathfrak{l} = \rho(\Delta^+(\mathfrak{l})))$$

なる自然な$\mathbb{C}$-代数準同型の像を$A_{\lambda+\rho_\mathfrak{l}}$と書く。$\mathbb{C}_\lambda$が、weakly fairなら、ZDF加群$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^S(\mathbb{C}_\lambda)$は$R_{\lambda+\rho_\mathfrak{l}}(\mathfrak{l}:\mathfrak{g})$加群として既約(又は0)となり、従って$A_{\lambda+\rho_\mathfrak{l}} = R_{\lambda+\rho_\mathfrak{l}}(\mathfrak{l}:\mathfrak{g})$は$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^S(\mathbb{C}_\lambda)$が$(\mathfrak{g}, K)$加群として既約(又は0)となるための十分条件を与える。$A_{\lambda+\rho_\mathfrak{l}} \subsetneqq R_{\lambda+\rho_\mathfrak{l}}(\mathfrak{l}:\mathfrak{g})$となりうる様な$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$の場合に既約性の十分条件を与えたい。

$$A_{\lambda'+\rho_\mathfrak{l}} \to A_{\lambda+\rho_\mathfrak{l}}, \quad \mathcal{R}_\mathfrak{q}^S(\mathbb{C}_{\lambda'}) \to \mathcal{R}_\mathfrak{q}^S(\mathbb{C}_\lambda)$$

のtranslationがうまくゆくなら、「λ'での既約性⇒λでの既約性(又は0)」が従うという考えに基づいて、Voganはこの様な(λ', λ)を見出し、[K3]によってその精密化が与えられた。なお、この十分条件は複素化だけで記述される。

§6 $\mathcal{R}_\mathfrak{q}^S(\mathbb{C}_\lambda) \neq 0$

$\mathbb{C}_\lambda \in \mathcal{M}(\mathfrak{l}, (L\cap K)^\sim)$がweakly fairなら、$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^j(\mathbb{C}_\lambda)$は$j = S$次を除いてすべて消滅するが、$j = S$次で$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^S(\mathbb{C}_\lambda) \neq 0$かどうかは$\lambda$に依存する。この十分条件を得る方法として

0) Kazhdan-Lustig予想 …実用上困難な事が多い。

1) (大島(not written), see[K1]) 対称空間の(通常の、又はベクトル束値の)離散系列となっている場合、「$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^S(\mathbb{C}_{\lambda'}) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{R}_\mathfrak{q}^S(\mathbb{C}_\lambda) \neq 0$」

が G/H の無限遠で漸近挙動が消えていない方向に translate できる時に保証される。この鎖が続く限り $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_\lambda) \neq 0$。

2) (松木-大島 (in preparation)) λ に依存する特別な小さい K type の重複度が、一般化された Blattner の公式を巧妙に計算して、0 でない事が言えれば $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_\lambda) \neq 0$.

3) ([K3] §6) coherent continuation を使う。

そのアイディアは、パラメーターが十分'小さい'集合を $\mathcal{B}$, fair な集合を $\mathcal{F}$ とすると (下図参照)

・$\{\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_\lambda) : \lambda \in \mathcal{B}\}$ は 1 つの閉じた世界を作っている

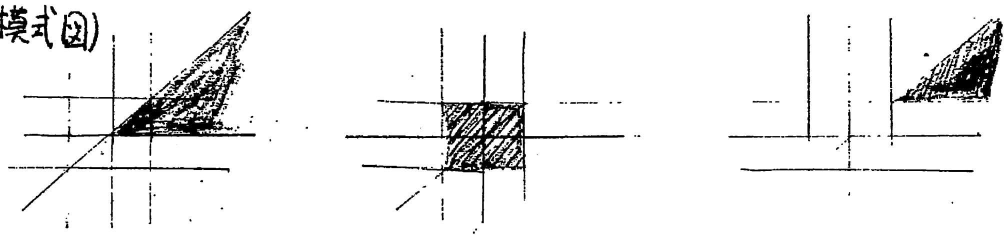
・$\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}$ に良い情報が潜んでいる事もある

に基づく。実際には、組み合せの問題に帰着して

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_\lambda) \equiv 0 \ (\forall \lambda \in \mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_\lambda) = 0 \ (\exists \lambda \in \mathcal{B} \cap \mathcal{F})$$

を示し、左が成り立たない $(\mathfrak{g}, \mathfrak{q})$ を見つけるという方法をとる。

(模式図)



$\mathcal{F}$ (fair)　　$\mathcal{B}$ ('小さい')　　good

(1)(2)(3) の方法はそれぞれ広い適用範囲を持つが、今の所決定的な理解を与えていない。

逆に、$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_\lambda) \neq 0$ の必要条件を得る方法として、

対称空間の離散系列となる時には松木[M]による幾何的な美しい証明が知られている。しかし対称空間上の関数に実現されている事に深く依存しており一般のZDF加群には今の所適用し難い。$G = U(p,q;\mathbb{F})$の特別な例に対しては、すべてのK-typeの重複度をある特別な多項式で評価するという方法が使える([K3])。fairの条件を課さなくてよいので逆に例の一般性を示唆しているとも考えられる。この手法がどの程度一般的に使えるかは今の所わかっていない。

REFERENCES

[K1] T.Kobayashi, *Construction of discrete series for vector bundles over semisimple symmetric spaces*, RIMS Kokyuroku **642** (1988), 134-156.

[K2] ——————, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math.Ann. (1989).

[K3] ——————, *On algebraic properties of certain series of Zuckerman's derived functor modules realized as discrete series for $U(p,q;\mathbb{F})/U(p-m,q;\mathbb{F})$*, preprint (1989).

[K4] ——————. 半単純対称空間上のベクトル束値関数に実現されるユニタリ表現, 第28回実函数論・第27回函数解析学合同シンポジウム報告集(1989).

[MO] T.Matsuki and T.Oshima, *A description of discrete series for semisimple symmetric spaces*, Advanced Studies in Pure Math. **4** (1984), 331-390.

[M] T.Matsuki, *A description of discrete series for semisimple symmetric spaces II*, Advanced Studies in Pure Math. **14** (1988), 531-540.

[Sc] H.Schlichtkrull, *A series of unitary irreducible representations induced from a symmetric subgroup of a semisimple Lie group*, Invent.Math. **68** (1982), 497-516.

[SOK] T.Sunada, K.Ono and T.Kobayashi, *Periodic Schrödinger operators on a manifold*, Forum Mathematicum **1-1** (1989), 69-79.

[V1] D.Vogan, *Unitarizability of certain series of representations*, Ann.Math. (1984), 141-187.

[V2] ————, *Irreducibility of discrete series representations for semisimple symmetric spaces*, Advanced Studies in Pure Math. **14** (1988), 191-221.