論文の内容の要旨

論文題目　Solution to Lipsman's conjecture on proper action and discontinuous duality theorem

(固有な作用に関する Lipsman 予想の解決と不連続双対定理)

氏　　名　吉野 太郎

1 Clifford-Klein 形

空間の局所的性質は, 時としてその大域的構造に強い制約を課す. 例として, Calabi-Markus 現象, Auslander 予想を挙げよう.

例 1 (Calabi-Markus 現象 1962). M を完備で定曲率な 3 次元以上のローレンツ多様体とする. このとき M は常に非コンパクトで, 基本群は有限である.

予想 2 (Auslander 予想 1964). M を完備でアファイン平坦なコンパクト多様体とすると, M の基本群は 'ほぼ可解' である (有限指数の可解部分群を持つ).

注 3. Abels-Margulis-Soifer(1997) は, 6 次元以下で Auslander 予想は正しいと発表している.

これらの問題に, 空間の局所的性質のみに注目するのではなく, 基本群と局所構造を同時に統率するリー群 (例えば例 1 では $SO(n,1)$, 予想 2 では $\mathit{Aff}(n,\mathbb{R})$) に着目してアプローチしてみよう.

補題 4. リー群 G とその閉部分群 H, 離散部分群 Γ に対し, 次は同値である.

1. 両側剰余類の空間 $\Gamma\backslash G/H$ には多様体の構造が入り, 商写像
$$\pi : G/H \to \Gamma\backslash G/H$$
が被覆写像となる.
2. Γ は等質空間 G/H に固有不連続かつ (固定点) 自由に作用する.

定義 5. 上の条件の一つ (従って両方) が成り立つとき, 商空間 $\Gamma\backslash G/H$ を G/H の **Clifford-Klein 形**といい, Γ を G/H の不連続群という.

Clifford-Klein 形の視点から, 先の命題は次のように言い換えられる.

例 6 (Calabi-Markus 現象の言い換え). Clifford-Klein 形 $\Gamma\backslash SO(n,1)/SO(n-1,1)$ において, $n \geq 3$ ならば Γ は有限である.

予想 7 (Auslander 予想の言い換え). Clifford-Klein 形 $\Gamma\backslash \mathit{Aff}(n,\mathbb{R})/GL(n,\mathbb{R})$ がコンパクトならば Γ は 'ほぼ可解' である.

即ち, 次の二つの問いは本質的に等しい.

問 8. 局所構造が G/H で与えられたとき, どのような大域構造 (基本群) が許容されるか？

問 9. どのような離散部分群 Γ が G/H に固有不連続かつ自由に作用するか？

これらの問いは Clifford-Klein 形の基本的問題であり, また本論文のテーマでもある.

2　固有性とその判定条件

作用が自由か否かは容易に判定できるので, 固有不連続性の判定に焦点を絞ろう. 固有不連続な作用の抽象化として, 固有という概念を定義する.

定義 10 (小林). L, H をリー群 G の部分集合とする.

1. (L,H) が**固有**とは, G の任意のコンパクト集合 S に対し, $L \cap SHS$ が相対コンパクトになることをいい, 記号 $L \pitchfork H$ in G で表す.
2. (L,H) が**相似**とは, G のあるコンパクト集合 S で, $L \subset SHS,\ H \subset SLS$ とできることをいい, 記号 $L \sim H$ in G で表す.

離散部分群 Γ と閉部分群 H に対しては,

$$\Gamma \pitchfork H \text{ in } G \iff \Gamma \text{は} G/H \text{に固有不連続に作用する}$$

となり, 固有な関係 $\pitchfork$ が固有不連続な作用の自然な抽象化であることが分かる. また, 相似 $\sim$ は同値関係であり, 部分集合 L, L', H に対し

$$L \sim L' \Rightarrow (L \pitchfork H \Leftrightarrow L' \pitchfork H)$$

を満たす. 即ち, 固有性を考える上では, $\sim$ の分の違いを無視して構わない.

G が簡約線形リー群の場合, カルタン射影 $\mu : G \to \mathfrak{a}$ を用いて, 固有性 (あるいは相似性) の判定をカルタン部分代数 $\mathfrak{a}$ での固有性 (相似性) に帰着できることが知られている.

定理 11 (小林). L, H を簡約線形リー群 G の部分集合とする.

1. $L \pitchfork H$ in $G \iff \mu(L) \pitchfork \mu(H)$ in $\mathfrak{a}$

2. $L \sim H$ in $G \iff \mu(L) \sim \mu(H)$ in $\mathfrak{a}$

但し, ここでは $\mathfrak{a}$ を加法群と見なしている. 可換リー群においては, 固有性の判定が容易にできる為, この定理は使い勝手の良い判定条件を与えている. また, 仮に L が G の部分群であっても, $\mu(L)$ が $\mathfrak{a}$ の部分群になるとは限らない. 固有という概念を部分集合にまで拡張した理由はここにある.

3 カルタン運動群

本論文の第二章ではカルタン運動群における固有性の判定条件を与える. 簡約線形リー群 G にそのカルタン対合 θ を与えると, G のリー環は $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ と $d\theta$ の固有空間に分解される. このとき元のリー群は $G = e^{\mathfrak{p}}K$ と表されるが, K と $\mathfrak{p}$ を 'ひねって' つなげると**カルタン運動群** $G_\theta := K \ltimes_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{p}$ が得られる. G_θ は簡約でなく, 両者は群として同型ではない. しかし, 写像

$$\Phi_\theta : G \to G_\theta, \qquad e^X k \mapsto (k, X)$$

により, 多様体としては同型である.

定理 12. L, H をカルタン運動群 G_θ の部分集合とする.

1. $L \pitchfork H$ in $G_\theta \iff L_{\mathfrak{a}} \pitchfork H_{\mathfrak{a}}$ in $\mathfrak{a}$

2. $L \sim H$ in $G_\theta \iff L_{\mathfrak{a}} \sim H_{\mathfrak{a}}$ in $\mathfrak{a}$

ここで, G のカルタン部分代数 $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ の部分空間であるから, G_θ の部分群である. また, $L_{\mathfrak{a}} := KLK \cap \mathfrak{a}$ とおいた.

この定理の応用として, **空間形予想**の "カルタン運動群版" が得られる.

定理 13. $G = SO(p+1, q), H = SO(p, q)$ としたとき, $H_\theta = \Phi_\theta(H)$ は G_θ の部分群であり,

1. $p \geq q > 0$ なら Clifford-Klein 形 $\Gamma \backslash G_\theta / H_\theta$ は常に非コンパクトで Γ は有限群.

2. (p, q) が以下の表に入っているとき, コンパクトな Clifford-Klein 形 $\Gamma \backslash G_\theta / H_\theta$ が存在する.

p	$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7
q	0	$\mathbb{N}$	$2\mathbb{N}$	$4\mathbb{N}$	$4\mathbb{N}$	$8\mathbb{N}$	$8\mathbb{N}$	$8\mathbb{N}$	$8\mathbb{N}$

元来の空間形予想は $SO(p+1, q)/SO(p, q)$ がコンパクト Clifford-Klein 形を持つには, (p, q) が次の表に入っている事が必要十分と主張している.

p	$\mathbb{N}$	0	1	3	7
q	0	$\mathbb{N}$	$2\mathbb{N}$	$4\mathbb{N}$	8

どちらも, 十分性は分かっているが, 必要性は分かっていない.

4 不連続双対定理

リー群 G の部分集合 L に対し, L の**不連続双対**とは, G 内で L と固有な関係にある部分集合全体の集合である.

$$\pitchfork(L) := \{H \subset G \mid L \pitchfork H \text{ in } G\} \qquad (L \text{ の不連続双対})$$

$L_1 \sim L_2$ なら両者の不連続双対は一致するが, 次の結果はその逆が成り立つことを主張する.

定理 14 (不連続双対定理 (小林)). G を簡約リー群とし, L をその部分集合とする. L の不連続双対 $\pitchfork(L)$ は (同値関係 $\sim$ の違いを除いて)L を復元する.

一般の (簡約でない) リー群における双対性は『数学の最先端 21 世紀への挑戦』で未解決問題として挙げられている. 本論文の第三章ではこれを解決する.

定理 15. 不連続双対定理は一般のリー群 G に対しても成り立つ.

5 余コンパクト連結閉部分群の存在

次節で見られるように, 離散部分群に比べ連結部分群の扱いは, しばしば容易になる. 離散部分群の議論を連結部分群に帰着するために, 次の補題が役立つ.

補題 16. G の部分群 L が離散部分群 Γ を**余コンパクト**に含むとき, 任意の部分集合 H に対し

$$L \pitchfork H \iff \Gamma \pitchfork H$$

もちろん, この補題は L や Γ の存在までは保証しない. これらの存在について考えよう.

L が簡約線形リー群なら, 常に余コンパクト離散群 Γ が存在する (Borel 1963). しかし, 簡約リー群の勝手な離散部分群 Γ を余コンパクトに含む連結閉部分群 L が存在するとは限らない.

一方, ベキ零リー群においては状況が逆転する.

定理 17. 連結かつ単連結なベキ零リー群の勝手な離散部分群 Γ は, 常にある連結閉部分群 L に余コンパクトに含まれる.

本論文の第四章ではこの定理を示す. 記号的に表すと次の様になる.

簡約線形	連結, 単連結ベキ零
${}^{\forall}L \supset {}^{\exists}\Gamma$	${}^{\forall}\Gamma \subset {}^{\exists}L$

6 Lipsman 予想

定理 11, 定理 12 のような判定条件が得られるには, ‘大きな’ コンパクト部分群の存在が決定的に重要である. 連結かつ単連結なベキ零リー群のように, 非自明なコンパクト部分群を持たない場合, 同様の手法がうまくいかない. 一方, 前節で述べたように, 連結かつ単連結なベキ零リー群では, 離散部分群 Γ に対し, これを余コンパクトに含む連結閉部分群 L が存在する. 従って, このような L に対してのみ固有性が判定できれば十分である. その判定条件の有力候補として (CI) 条件を挙げよう.

定義 18 (小林). リー群 G の閉部分群 L, H に対し, (L, H) が (CI) であるとは, $L \cap gHg^{-1}$ がコンパクトであることをいう.

(CI) 条件は固有性より弱い条件であり, また判定もしやすい. 簡約リー群内で二つの簡約部分群に対し, 固有性と (CI) 条件が同値という小林の結果をもとに, Lipsman はベキ零リー群においても, これらが同値であると予想した.

予想 19 (Lipsman 1995). $N(n)$ を n 次の上三角行列全体のなすベキ零リー群とする.

(a) $G = N(n+1), H = N(n), L$ を G の連結閉部分群としたとき,

$$(L, H) \text{ が固有} \iff (L, H) \text{ が (CI)}$$

(b) より一般に, G を連結かつ単連結なベキ零リー群とし, L, H をその連結閉部分群とすると,

$$(L, H) \text{ が固有} \iff (L, H) \text{ が (CI)}$$

この予想の (a) において, $G/H \simeq \mathbb{R}^n$ であるから, (a) は線形空間 $\mathbb{R}^n$ にアファイン変換として作用するベキ零リー群 L の予想に他ならない.

本論文はこの予想を解決する.

定理 20. Lipsman 予想の真偽は次で与えられる.

(a): $\dim(G/H) = n$	
$n = 2$	真 (小林 1992)
$n = 3$	真 (Lipsman 1995)
$n = 4$	真
$n \geq 5$	偽

(b): G が n-step ベキ零	
$n = 1$	真
$n = 2$	真 (Nasrin 2000)
$n = 3$	真
$n \geq 4$	偽

すなわち, Lipsman 予想には反例が存在し, 固有性の判定は (一般には) 別の条件が必要となる. (a) の $n = 4$ の場合において, 本論文第五章で**プリミティブ**な部分群というものを定義し, 問題を L がプリミティブな場合に帰着する. この概念は, $n \geq 5$ での反例の発見に役立った. なお, 3-step ベキ零に関して, Baklouti-Khlif (2004, preprint) も同時期に独立に同じ結果を別の手法で得ている.