Radon transform on functions supported on a homogeneous cone
等質錐上に台をもつ関数のラドン変換

真野 元

古典的な例から始めよう。$\mathbb{R}^n$ 上の Fourier 変換 $\mathcal{F}$ は次のふたつの性質をもつことに注意する：

C1 $\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の Radon 変換と Mellin 変換の合成として平面波分解する。
C2 $\mathcal{F}$ は Weil 表現の Schrödinger モデルのユニタリ反転作用素として現われる。

Weil 表現はメタプレクティック群（シンプレクティック群の二重被覆群）に対する**極小表現**であるが、不定値直交群 $O(p+1,q+1)$ （ただし、(p,q) は $p,q \geq 1, p+q \geq 4$ なる自然数の組）の極小表現に対しても L^2 モデルが存在することが小林-Ørsted によって証明された（Adv. Math. 2003)。さて、半単純リー群の極小表現は、既約ユニタリ表現の中で Gelfand-Kirillov 次元が最も小さく、ユニタリ双対の中で孤立している表現であり、古くから知られている Weil 表現を除いては 1990 年代にようやく研究が始まった（Kadzdan, Brylinski, Kostant, Torasso, Li, Huang, Zhu, Kobayashi, Ørdted, Sahi など)。極小表現にはいくつかモデルが知られているが、群作用がわかりやすいモデルは、内積が難しく、L^2 モデルのように内積がわかりやすいモデルでは群作用が難しい。この群作用を具体的に表わす鍵は、ユニタリ反転作用素を具体的に決定することである。実は、Fourier 変換と同様に平面波分解が存在して、それは標語的に

$$\text{「ユニタリ反転作用素」} = \text{「Radon 変換の一般化」} + \text{「Hankel 変換の一般化」} \tag{D}$$

と書くことができる。

主論文は「Radon 変換の一般化」に相当する対象である「錐に台をもつ関数の Radon 変換」を扱う。参考論文 [1] では、「Hankel 変換の一般化」を詳細に扱っており、このふたつの論文の基礎づけのもとに、L^2 モデルにおける群作用を具体的に与えるというプロジェクトが完成した。

ここで、「Radon 変換の一般化」とは、$\mathbb{R}^{p+q}$ 内の錐

$$C \equiv C_{p,q} := \{x \in \mathbb{R}^{p+q} \setminus \{0\} : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0\}$$

上に台をもつ C^∞ 級関数 f を $\mathbb{R}^{p+q}$ 上の超関数とみなして Radon 変換 Rf を行うことを意味する。コンパクト台をもつ f に対して、Rf は通常の Radon 変換と類似したいくつかの期待された性質（moment 条件など）を満たすが、大きな相違点として、台が C に含まれることに対応する微分方程式に加え、(超平面のパラメータを $(\zeta,t) \in (\mathbb{R}^{p+q} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ としたとき）$t=0$ で無限回微分可能ではない（$p+q=3,4$ では連続でさえない）ということがあり、その精密な解析が主論文の結果である。ここでは簡単のため、$p+q \geq 6$ かつ $p+q$ は偶数であるとする。

Theorem A. 1) $Rf(\zeta,t)$ は、$t=0$ で $\frac{p+q-6}{2}$ 回連続微分可能である。
2) $(Rf)(\zeta,t)$ が $t=0$ でもはや $\frac{p+q-4}{2}$ 回微分をもたないような C 上の関数 f が存在する。

この定理の帰結として、(D) のスキームにおけるユニタリ反転作用素 S が

$$Su = H \circ Ru \tag{$*$}$$

のように平面波分解され、それが well-defined であることがわかる。ここで、H は

$$\Xi_{p,q}(t) = (2t)_+^{-\frac{p+q-4}{4}} J_{\frac{p+q-4}{2}}(2\sqrt{2t_+}) - \sum_{l=0}^{\frac{p+q-6}{2}} \frac{(-\frac{1}{2})^l}{\Gamma(\frac{p+q-6}{2}-l)} \delta^{(l)}(t)$$

によって定義される超関数との pairing であるが、(ただし $J_\nu(z), Y_\nu(z), K_\nu(z)$ は(変形)Bessel 関数である)、これが well-defined であるためには、Ru が原点 $t=0$ で少なくとも $\frac{p+q-6}{2}$ 回微分可能でなければならない。

Theorem B. *Radon* 変換の反転公式 $R = S \circ H$ が成り立つ。

この積分変換 S は、Kobayashi-Ørsted(2003, Adv. Math.) での議論をもとにして、参考論文 [1] で初めて具体的に決定された作用素である。Fourier 変換が $Mp(n, \mathbb{R})$ の Weil 表現の解析において重要な役割を担っているように、我々の作用素 S も $O(p+1, q+1)$ の極小表現の(錐 C 上の実現の)理解の鍵を握っているといえる。

証明は特殊関数(Appell の二変数超幾何関数)を用いて、具体的に反例を構成する方法を用いており、特殊関数の漸近挙動によるアプローチが主論文の特徴でもある。

参考文献

[1] Integral formula of the unitary inversion operator for the minimal representation of $O(p,q)$, 68 pages. (joint with T. Kobayashi)　発表予定