数理科学特別講義 I　レポート問題

出題：2009 年 12 月 11 日　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

$*$ <u>A4 レポート用紙</u>にて提出のこと．

---

3 次の実対称行列のなす実ベクトル空間を V とする：$V := \mathrm{Sym}(3, \mathbb{R})$.

[1] (1) $\langle x \,|\, y \rangle := \mathrm{tr}(xy)$ は V に内積を定義することを示せ．

以下，V はこの内積から決まるノルム $\|x\| := \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}$ でノルム空間と見る．

(2) V に属する行列で，正定値なもの全体がなす集合を Ω とする．Ω は凸錐で，しかも開集合であることを示せ．

(3) $x \in V$ とするとき

$$x \in \Omega \iff \mathrm{tr}(xy) > 0 \quad (\forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})$$

であることを示せ．ただし，$\overline{\Omega}$ は Ω の閉包を表す．

(4) 3 次の一般線型群 $G := GL(3, \mathbb{R})$ は，$\rho(g)x := gx{}^tg$ $(x \in V)$ で $\rho(g) \in GL(V)$ を定義する．この ρ を通して，G は Ω に推移的に作用していることを示せ．

(5) G の部分群

$$H := \left\{ h := \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} h_{11} > 0,\, h_{22} > 0,\, h_{33} > 0 \\ h_{21}, h_{31}, h_{32} \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

は問 (4) の ρ により，Ω に単純推移的に（固定部分群は単位元のみ）作用していることを示せ．

(6) $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\chi_{\mathbf{s}}(h) = h_{11}^{2s_1} h_{22}^{2s_2} h_{33}^{2s_3}$ $(h \in H \text{ as in } (5))$ は H の 1 次元表現である．Ω 上の函数 $\Delta_{\mathbf{s}}$ を $\Delta_{\mathbf{s}}(h{}^th) := \chi_{\mathbf{s}}(h)$ で定義する．ここで，$h{}^th = \rho(h)e$（ただし e は 3 次の単位行列）に注意．このとき，$\Delta_{\mathbf{s}}(x) = \Delta_1(x)^{s_1 - s_2} \Delta_2(x)^{s_2 - s_3} \Delta_3(x)^{s_3}$ $(x \in \Omega)$ となることを示せ．ただし，$x = (x_{ij}) \in V$ に対して，左上の k 次小行列式を $\Delta_k(x)$ としている： $\Delta_1(x) = x_{11}$, $\Delta_2(x) = \det \left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{smallmatrix} \right)$, $\Delta_3(x) = \det x$.

(7) Ω の点列 $\{x^{(k)}\}$ が $x \in \partial\Omega$（Ω の境界）に近づくとき，必ず $\Delta_{\mathbf{s}}(x^{(k)}) \to 0$ となるための必要十分条件は $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, $s_3 > 0$ であることを示せ．

次ページに続く

[**2**] 前問の記号をそのまま使うことにする．

(1) W を V の複素化とする．$W = \mathrm{Sym}(3,\mathbb{C})$ である．$U := \mathbb{C}^3$（縦ベクトル）とし，そこでの標準的なエルミート内積を $(\cdot\,|\,\cdot)_{\mathbb{C}^3}$ で表す．各 $u, u' \in U$ を固定するとき，$W \ni w \mapsto (wu\,|\,u')_{\mathbb{C}^3}$ は W 上の複素線型形式であるから，一意的に $w' \in W$ が定まって，$\mathrm{tr}(ww') = (wu\,|\,u')_{\mathbb{C}^3}$ となる．この w' は $u, u' \in U$ に対して一意的に定まるので，$w' = Q(u, u')$ と表す．$(u\,|\,u')_{\mathbb{C}^3} = \mathrm{tr}(u(u')^*)$ と書けることに注意して，$Q(u,u') = \frac{1}{2}\bigl(u(u')^* + \overline{u'}\,{}^t u\bigr)$ であることを示せ．そして，$Q : U \times U \to W$ は Hermitian sesqui-linear で，しかも Ω-positive であることを示せ．

以上のデータから，Siegel 領域 $D = D(\Omega, Q)$ を定義する：

$$D := \{(u, w) \in U \times W\ ;\ \mathrm{Im}\, w - Q(u,u) \in \Omega\}.$$

(2) $h \in H$ と問 (1) の Q に対して，

$$\rho(h)\bigl(Q(u,u')\bigr) = Q(hu,\, hu') \qquad (u, u' \in U)$$

が成立することを示せ．

(3) N_Q は記号 $n(a,b)$ $(a \in V,\, b \in U)$ の全体に

$$n(a,b)n(a',b') := n(a + a' + 2\,\mathrm{Im}\, Q(b,b'),\, b + b')$$

で積を定義したものとする．N_Q は群をなすことを示せ．

(4) 各 $h \in H$ に対して，N_Q 上の写像 $\alpha(h)$ を $\alpha(h)(n(a,b)) = n(\rho(h)a,\, hb)$ で定義する．このとき，$h \mapsto \alpha(h)$ は H から N_Q の自己同型群 $\mathrm{Aut}(N_Q)$ への準同型であることを示せ．

(5) 直積集合 $N_Q \times H$ に，

$$(n(a,b), h)(n(a',b'), h') := (n(a,b)n(\rho(h)a', hb'), hh')$$

で積を入れると，群をなしていて，N_Q と $N_Q \times \{e\}$（e は 3 次の単位行列）を同一視するとき，N_Q は正規部分群になっていることを示せ．（この群を N_Q と H の半直積といい，$N_Q \rtimes H$ で表す）．

(6) $n(a,b) \in N_Q,\, h \in H$ のとき

$$(n(a,b), h) \cdot (u, w) := \bigl(hu + b,\, \rho(h)w + a + iQ(b,b) + 2iQ(hu, b)\bigr) \quad ((u,w) \in D)$$

とおくと，これは $N_Q \rtimes H$ の D への作用を定義していて，この作用は単純推移的であることを示せ．

以上