2016年夏学期 数理科学概論 I (文科生) 期末試験*

(2016年7月21日 (木曜日) 1限 8:40–10:10)

担当:小林俊行教授

持ち込み：不可　解答用紙：1枚　問題用紙：1枚　計算用紙：1枚

- 解答する際は答えだけでなく，結論に至るまでの過程も短く説明すること。
- 自分の答案の中で不明瞭だと感じられる場合，どこが不明瞭かを答案に明記してください。曖昧な議論が断定的に書かれている答案よりもそちらをより高く評価します。
- 問題は1〜4番を必須とし，5〜7番の内から1題を選んで，合わせて5題を解答してください（100点満点）。

1. (必須，20点 $= 6+6+8$) $3^{12} \div 2^{19}$ を計算すると，

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} \fallingdotseq 1.01364326 \qquad (*)$$

となり，1に非常に近い数となる．以下ではこのことを用いて，次の問に答えよ．

(1) (ピタゴラスコンマ) $2^{\frac{19}{12}}$ は3に “非常に近い” ことを次の形で示せ．

$$2^{\frac{19}{12}} = \frac{3}{1+\varepsilon} \qquad \text{ただし，} 0 < \varepsilon < 0.002.$$

(2) (複利計算・平均音律) 毎月一定の比率で複利運用して1年後に2倍になったとする．10月に440円で運用を開始したとき，翌年の5月にはいくらになっているか？

(3) (炭素を用いた年代推定の原理) 自然界における炭素はほとんどが「炭素１２」と呼ばれる元素であるが，約1兆分の1の割合 (炭素1グラムにつき600億個くらい) で同位元素である「炭素 １４」が含まれている．ある縄文土器に含まれる繊維において，炭素１４が約3兆分の1の割合 (炭素1グラムにつき200億個くらい) で含まれていたとする．炭素１４の半減期を5730年として，この土器の年代を有効数字2桁で推定せよ．(実際には，炭素１４の比率は時代によって多少変動するため，その変動を別の方法で調べて補正を行う.)

2. (必須，20点 $= 2+2+2+2+8+4$) $S(N) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$ と定める．$N \to \infty$ としたとき，$S(N)$ の収束・発散，および，その “速さ” について，以下の手順で論ぜよ．

(1) (合成関数の微分) $y = f(x)$ と $x = g(t)$ を合成して得られる関数 $F(t) = f(g(t))$ の微分 $\frac{d}{dt}F(t)$ を f, g を用いて表せ．

(2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ と定めるとき，$\frac{d}{dx}e^x$ を求めよ．

(3) 底を e とする対数関数 $\log x$ を指数関数 e^x の逆関数として定義する．(1) を用いて $\frac{d}{dx}\log x$ を求めよ．

(4) $\int_a^b \frac{1}{x}dx$ を求めよ (ただし，$0 < a < b$ とする)．

(5) N が 2 以上の自然数のとき，区分求積法と (4) を用いて以下の不等式が成立することを示せ．

$$\log(N+1) < S(N) < 1 + \log N$$

(6) N が 1 京 $= 10^{16}$ の時，$S(10^{16}) < 100$ を示せ．$\lim_{n\to\infty} S(N) = \infty$ を示せ．

3. (必須，20 点 $= 5 \times 4$) $f(x, y)$ を 2 変数 x, y の微分可能な関数とする．

(1) 等高線と勾配ベクトルの定義を書け.

(2) 等高線と勾配ベクトルの関係を簡潔に述べよ.

(3) xyz 空間内のグラフ $z = f(x, y)$ を山の斜面と見たとき、登りが最も急な方向を xy 平面内のベクトルの言葉で述べよ（答えのみでよい）.

(4) $f(x, y) = xy^2 + x^2$ の勾配ベクトルを計算し，グラフ $z = f(x, y)$ の点 $(1, 1, 2)$ における接平面を求めよ．

4. (必須，20 点 $= 10 + 10$)

(1) (曲線の長さ) $f(x)$ を微分可能な関数とする．平面上の曲線 $(x, f(x))$ $(a \le x \le b)$ の長さを区分求積法を用いて導出せよ．

(2) (懸垂線の長さ) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ とするとき，曲線 $(x, f(x))$ $(-R \le x \le R)$ の長さを求めよ．

5. (選択，20 点) 駒場キャンパスから富士山の山頂を見た時の仰角を度数法で求めよ．ただし，駒場キャンパスの標高は 38 m, 富士山の標高は 3776 m, 駒場から富士山までの水平方向の直線距離は 92.4 km として計算せよ．誤差 20 %以内を正解とする．(誤差評価まで精密な議論をした場合には $+\alpha$ の加点をする．) (天気の良い日の早朝には駒場キャンパスから富士山が見えることがあるので，機会があればご覧ください．)

6. (選択，20 点) (ガウス積分, 二重積分) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ の値を求めよ．

7. (選択，20 点) (ラグランジュの未定乗数法) $x^4 + y^4 + z^4 = 3$ で定義される xyz 空間内の曲面上での関数 $x + y + z$ の臨界点をすべて求めよ．

出典・関連する内容とヒント

1. 4 月 21 日の講義, (3) 第 3 回演習問題問 11.
2. (1) 5 月 19 日の講義，第 4 回演習問題，(2) 4 月 28 日の講義，第 4 回演習問題問 3, (3) 第 4 回演習問題問 17, 19, (4) 微分積分学の基本定理 (7 月 14 日の講義), (5), (6) 4 月 14 日の講義，第 2 回演習問題問 5.
3. (1) 6 月 9, 16 日の講義, (2), (3) 6 月 23 日の講義, (4) 6 月 9 日の講義，第 7 回演習問題問 7.
4. (1) 7 月 14 日の講義，第 11 回演習問題問 8, (2) 7 月 14 日の講義，第 11 回演習問題問 10.
5. 5 月 26 日の講義, $\sin x$, $\cos x$ のテイラー展開.
6. 7 月 7, 14 日の講義，第 13 回演習問題問 8.
7. 6 月 23 日の講義，第 9 回演習問題問 3.