The 11th Takagi Lectures

November 17 (Sat)–18 (Sun), 2012
Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo, Tokyo, Japan

ABSTRACT

P.F. Baum:
Non-Commutative Geometry and the Local Langlands Conjecture
（非可換幾何と局所ラングランズ予想）

Let G be a reductive p-adic group. Examples are $GL(n, F)$, $SL(n, F)$, etc where n can be any positive integer and F can be any finite extension of the field Q_p of p-adic numbers. The smooth dual of G is the set of (equivalence classes of) smooth representations of G. The representations are on vector spaces over the complex numbers. In a canonical way, the smooth dual of G is the disjoint union of countably many subsets known as the Bernstein components.

Results from non-commutative geometry—e.g. BC (Baum–Connes) conjecture, periodic cyclic homology of the Hecke algebra of G—indicate that a very simple geometric structure might be present in the smooth dual of G. The ABP (Aubert–Baum–Plymen) conjecture makes this precise by asserting that each Bernstein component in the smooth dual of G is a complex affine variety. These varieties are explicitly identified as certain extended quotients. For split G, (granted a mild restriction on the residual characteristic) the ABP conjecture has recently been proved for any Bernstein component in the principal series. A corollary is that the local Langlands conjecture is valid throughout the principal series. The above is joint work with Anne-Marie Aubert, Roger Plymen, and Maarten Solleveld.

Topics in these lectures:

#1. Review of the LL (Local Langlands) conjecture.

#2. Statement of the ABP conjecture.

#3. Outline of the proof that for any split reductive p-adic group G both ABP and LL are valid throughout the principal series of G. Class field theory, founded by Professor Teiji Takagi, is a basic point in all three topics.

G を p 進簡約群とする．p 進体 Q_p の有限拡大を F とすれば，$GL(n, F)$, $SL(n, F)$ などが G の例となる（n は任意の正整数）．ここで G の滑らかな表現の同値類全体のなす集合を，G の滑らかな双対という．ただし複素数体上のベクトル空間に実現される表現を考えておく．滑らかな双対は，Bernstein 成分とよばれる集合の加算個の和と自然に同一視される．このとき，非可換幾何における結果，例えば Baum–Connes 予想や G の Hecke 代数の周期的巡回ホモロジー群などから，G の滑らかな双対上に非常に簡明な幾何構造の存在する可能性が示唆される．このことを正確に述べたのが Aubert–Baum–Plymen 予想であり，予想は滑らかな双対の各 Bernstein 成分が複素アファイン多様体であることを主張する．さらにこれら多様体は，ある種の拡大商空間と明確に同一視できる．分裂 p 進簡約群の主系列表現に含まれる任意の Bernstein 成分については,（剰余体の標数に弱い制限をおいて）Aubert–Baum–Plymen 予想の成立することが最近証明された．その系として，全ての主系列表現に関して局所ラングランズ予想の成立することが従う．この結果は Anne–Marie Aubert，Roger Plymen および Maarten Solleveld との共同研究による．

この講演で扱う内容について：

1. 局所ラングランズ予想の説明

2. Aubert–Baum–Plymen 予想の記述

3. 分裂 p 進簡約群に対して Aubert–Baum–Plymen 予想と局所ラングランズ予想が成立することの証明概略

上記 3 項目の基盤には，高木貞治先生によって創始された類体論が存在している．

A. Lubotzky:
Ramanujan Complexes and High Dimensional Expanders
（ラマヌジャン複体と高次元エクスパンダーグラフ）

Expander graphs, in general, and Ramanujan graphs, in particular, have been objects of intensive research in the last four decades. Many application came out, initially to computer science and combinatorics and more recently also to pure mathematics (number theory, geometry, group theory). In recent years, there has been an interest in generalizing this theory to higher dimensional simplical complexes. We plan to survey first the classical theory and then to describe the more recent developments. Some directions of current research will be presented as well as suggestions for future research.

一般にエクスパンダーグラフ，あるいは特殊な場合としてラマヌジャングラフは最近，約 40 年間にわたって大いなる研究がなされてきた．情報科学や組み合わせ論における応用からはじまり，最近は整数論や幾何学や群論などの純粋数学にも応用されている．最近，この理論を高次元の単体複体に拡張するという関心がもたれてきている．この講演では，最初に古典的な理論を紹介し，次に，より最近の発展を描写する予定である．現在行われている研究の方向および将来における研究の方向性についても話す予定である．

R. Seiringer:
Hot Topics in Cold Gases—A Mathematical Physics Perspective
（冷たい気体のホットなトピックス—数理物理的視点）

We present an overview of mathematical results on the low temperature properties of dilute quantum gases, which have been obtained in the past few years. The presentation includes a discussion of Bose–Einstein condensation, and focuses on the excitation spectrum for trapped gases and its relation to superfluidity, as well as the appearance of quantized vortices in rotating systems. All these properties are intensely being studied in current experiments on cold atomic gases. We will give a brief description of the mathematics involved in understanding these phenomena, starting from the underlying many-body Schrödinger equation.

近年得られた希薄量子気体の低温性質に関する数学的結果の概観を示す．それには，ボース・アインシュタイン凝縮の議論を含み，回転系における量子渦の出現や，捕獲ガスの励起スペクトルとその超流動との関係に焦点をおく．これらの性質はすべて，低温原子気体に関する現在の実験で集中的に研究されている．もとになる多体シュレーディンガー方程式から始めて，これらの現象の理解にかかわる数学を簡単に記述する．