早稲田大学大学院 理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Visible actions on multiplicity-free spaces

無重複空間における可視的作用について

申 請 者

笹木	集夢
Atsumu	Sasaki

数理科学専攻 代数解析学研究

２００８年 １月

リー群の無重複表現とは，既約表現を一般化した概念で，既約分解した際に各既約成分が高々１度しか現れない (重複のない) 表現のことである．無重複表現は表現論の内部において重要な役割を果たしてきた．また，フーリエ級数展開やフーリエ変換，テーラー展開，球面調和関数などの古典的な展開定理が無重複表現の例と解釈することができるように，無重複表現をもつ表現空間には自然な展開定理が存在すると期待される．このように，無重複表現は応用においてもいろいろな場面で登場し，歴史的に長期間にわたって研究が行われてきた．そして，これまでに種々の無重複表現が散発的に発見されてきた．しかし，有限次元，無限次元を含めた統一的な説明は与えられていなかった．

一方で，近年複素多様体における強可視的作用という概念が小林俊行先生によって導入された．

定義 1 (小林 '05)．リー群 G の複素多様体 D への正則な作用が**強可視的であるとは**，次の２条件を満たすときをいう．

(V) D の実部分多様体 S が存在して (この S を**スライス**という)，
　(V.1) $D' := G \cdot S$ が D の開集合である．

(S) D' 上の反正則微分同相写像 σ が存在して，
　(S.1) $\sigma|_S = \mathrm{id}_S$,
　(S.2) $\sigma(G \cdot x) = G \cdot x$ $(\forall x \in D')$．つまり，σ は各 G-軌道を保存する． □

強可視的作用は，表現の無重複性の伝播定理 (事実 2) において必要不可欠な条件であり，特にスライス S は重要な役割を果たす．また，強可視的作用によって連続スペクトルを含むような無限次元表現に対しても広い範囲で無重複表現の説明ができる，という理論が進展している．

事実 2 (小林 '05)． G をリー群とし，$\mathcal{V}$ を連結な複素多様体 D 上の G-同変な正則エルミートベクトル束とする．次の (a)–(c) の３条件を満たすとき，正則な切断の空間 $\mathcal{O}(D, \mathcal{V})$ 内に実現される G のユニタリ表現は無重複表現である．

(a) 定義 1 の (V.1)–(S.2) を満たすスライス S と σ が存在する．つまり，G の D への作用が強可視的である．また，$\sigma(g \cdot x) = \widehat{\sigma}(g) \cdot \sigma(x)$ $(\forall g \in G, \forall x \in D')$ を満たす群同型写像 $\widehat{\sigma}$ が存在する．

(b) 任意の $x \in S$ に対して，x におけるファイバー $\mathcal{V}_x$ は x における G の等方部分群 G_x のユニタリ表現として重複なく既約分解される．
ファイバー $\mathcal{V}_x$ の既約分解を $\mathcal{V}_x = \bigoplus_{i=1}^{n(x)} \mathcal{V}_x^{(i)}$ で表す．

(c) σ は $\mathcal{V}$ 上の反正則自己同型 $\widetilde{\sigma}$ まで持ち上がり，各 $x \in S$ に対して $\widetilde{\sigma}_x(\mathcal{V}_x^{(i)}) = \mathcal{V}_x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n(x))$ を満たす． □

ここで，次の問題が自然に提起される．

問題． [A] 簡約リー群の無重複表現は強可視的作用をもつか．

[B] スライス S の幾何構造を明らかにせよ． □

さて，無重複表現の例として**無重複空間**という特別なカテゴリーがある．複素

ベクトル空間 V 上に連結な複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ の線型な作用を与えると，自然に多項式環 $\mathbb{C}[V]$ 上に $G_{\mathbb{C}}$ の表現が誘導される．この $\mathbb{C}[V]$ 上の表現が無重複表現であるとき V を $G_{\mathbb{C}}$ の無重複空間といい，さらに $G_{\mathbb{C}}$ の V への作用が既約であるときに既約な無重複空間，既約でないときに可約な無重複空間という．既約な無重複空間は Kac ('80) によって，可約な無重複空間は Benson–Ratcliff ('96)，Leahy ('98) によって分類された．いま，$\mathbb{C}[V]$ の既約分解を $\mathbb{C}[V] \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ で表すとしよう (Λ は最高ウェイトの集合，P_λ は $\lambda \in \Lambda$ をもつ既約表現空間)．このとき，Λ は一次独立な $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \Lambda$ によって $\Lambda = \mathbb{Z}_{\geq 0}\lambda_1 + \cdots + \mathbb{Z}_{\geq 0}\lambda_r$ と表される．この一次独立な $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \Lambda$ の個数 r を無重複空間 V の**ランク**という．ランクの計算は，既約な場合は Howe–梅田 ('91) によって，可約な場合は Knop ('98)，Benson–Ratcliff ('00) によって行われた．

本論文の目的は，彼らによって分類された無重複空間が強可視的な線型作用をもつことを示し，そのスライス S と σ を具体的に記述して S の幾何構造を明らかにすることである．複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ はコンパクトな実型 G_U をもち，Weyl のユニタリ・トリックによって $G_{\mathbb{C}}$ の V への作用と G_U の V への作用は 1 : 1 に対応する．本論文はコンパクトな実型 G_U の V への作用の強可視性を考える．

第１部：まず，既約な無重複空間について述べる．このとき，コンパクトな実型 G_U の無重複空間 V への既約な作用について次の結果を得た．

定理 A. V を連結な複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ の既約な無重複空間とする．

(1) コンパクトな実型 G_U の V への作用は強可視的である．

(2) (V.1)–(S.2) を満たすスライス S と σ は次の性質を満たすものが選べる．

 (a) S の実次元 $\dim_{\mathbb{R}} S$ は無重複空間 V のランクと一致する．

 (b) σ は $\sigma^2 = \mathrm{id}$ を満たす． □

逆に，コンパクトな簡約リー群 G_U の V への (線型) 作用が強可視的であるとき，事実 2 によって多項式環 $\mathbb{C}[V]$ は G_U の無重複表現であることが示される．以上より，次の系を得た．

系 B. 連結な複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ が複素ベクトル空間 V に線型かつ既約に作用しているとする．この設定の下で，次の 2 条件は同値である．

(i) V は $G_{\mathbb{C}}$ の既約な無重複空間である．

(ii) コンパクトな実型 G_U の V への既約な線型作用は強可視的である． □

定理 A は Kac の分類にある既約な無重複空間に対してスライス S と σ を具体的に記述することによって証明する．スライス S の求め方によって，Kac の分類をさらに [I1] エルミート対称空間型，[I2] 推移的作用型，[I3] $GL_m \times Sp_n$ 型の 3 つに分けることができる．[I1] 型，[I2] 型および $GL_2 \times Sp_n$ 型は，定理 A のスライス S は $V = G_U \cdot S$ を満たす実ベクトル空間を選ぶことができる．一方で，例えば $GL_3 \times Sp_n$ 型 $(n \geq 2)$ のとき，定理 A のスライス S は実ベクトル空間ではない．

さらに，[I2] 型に含まれる 3 つの既約な無重複空間に対する定理 A の証明から，簡約リー群 $SU(2n,1), SO_o(8,2), SO_o(7,2)$ の分解定理を得た．

定理 C. リー群の 3 つ組 (G,H,K) が，下の表のいずれかであるとする．このとき，ある可換群 $A \simeq \mathbb{R}^r$ $(r := \mathbb{R}\text{-rank } G)$ を用いて $G = HAK$ と表される．

G	H	K
$SU(2n,1)$	$Sp(n)$	$U(2n)$
$SO_o(8,2)$	$Spin(7) \times SO(2)$	$SO(8) \times SO(2)$
$SO_o(7,2)$	$G_2 \times SO(2)$	$SO(7) \times SO(2)$

□

K は簡約リー群 G の極大コンパクト部分群であり，H は K の部分群であるから，定理 C は Cartan 分解 $G = KAK$ を精密にした結果である．一方で，(G,H) は対称対ではないことに注意する．

第 2 部：次に可約な無重複空間について述べる．可約な場合は次の結果を得た．

定理 D. V を連結な複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ の可約な無重複空間とする．

(1) コンパクトな実型 G_U の V における作用は強可視的である．

(2) (V.1)–(S.2) を満たすスライス S と σ は次の性質を満たすものが選べる．

 (a) スライス S は実ベクトル空間で，$V = G_U \cdot S$ を満たし，$\dim_{\mathbb{R}} S$ と無重複空間 V のランクが一致する．

 (b) σ は $\sigma^2 = \mathrm{id}$ を満たす． □

Benson–Ratcliff，Leahy の分類によると，V はすべて 2 つの既約成分の直和 $V_1 \oplus V_2$ で与えられる．さらに，$G_{\mathbb{C}}$ の各既約成分 V_1, V_2 への作用に注目すると，すべて既約な無重複空間で定理 A の証明で挙げた [I1] 型，[I2] 型，$GL_2 \times Sp_n$ 型のいずれかであることが分かる．例えば，$G_{\mathbb{C}} = SL(2,\mathbb{C}) \times Sp(n,\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^2$ は $V = \mathbb{C}^2 \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2n})$ に $(g,h,\alpha,\beta) \cdot (v, w_1 \otimes w_2) = (\alpha g v, \beta g w_1 \otimes h w_2)$ によって作用する．この V は $G_{\mathbb{C}}$ の可約な無重複空間である．$\mathbb{C}^2$ は $SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ の既約な [I1] 型無重複空間，$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2n}$ は $SL(2,\mathbb{C}) \times Sp(n,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ の既約な無重複空間である．したがって，彼らの分類にある可約な無重複空間に対して，スライス S が実ベクトル空間が選べることは [I1] 型，[I2] 型，$GL_2 \times Sp_n$ 型の既約な無重複空間に対する定理 A の結果に起因する．

また，$G_{\mathbb{C}}$ の V への既約な作用に対する系 B の結果は可約な場合にも成り立つ．よって，複素ベクトル空間への強可視的な線型作用と無重複空間の 2 つの概念が完全に一致することを得た (次の系 E は系 B を含む結果である)．

系 E. 連結な複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ が複素ベクトル空間 V に線型に作用しているとする．この設定の下で，次の 2 条件は同値である．

(i) V は $G_{\mathbb{C}}$ の無重複空間である．

(ii) コンパクトな実型 G_U の V への線型作用は強可視的である． □