

# 学位論文の要旨

## Multiplicity-free decompositions of the minimal representation of the indefinite orthogonal group (不定値直交群の極小表現に対する無重複分解)

森脇 政泰

### §1. 主結果

主論文では,  $p + q > 2$  である自然数  $p, q \geq 1$  に対し, 不定値直交群  $G := O(2p, 2q)$  とその極小表現  $\pi$  を扱う. 半単純リー群の極小表現は, 既約ユニタリ表現の中で Gelfand–Killiov 次元が最も小さく, ユニタリ双対の中で孤立している表現である. 不定値直交群の極小表現  $\pi$  には, 1990 年頃から最近に至るまで, 種々の具体的なモデル (表現の実現) が様々な数学者 (Kazhdan, Kostant, Binetgar–Zierau, Zhu–Huang, Kobayashi–Ørsted など) によって提案されてきた.

さて, ある群の表現に対して部分群への制限が既約表現に分解できるとき, その既約分解の様子を表す明示的な公式を分岐則という. また, 離散的分解可能なユニタリ表現に対し, その既約分解における各既約表現が高々 1 回しか現れない現象を無重複という.

メタプレクティック群  $Mp(n, \mathbb{R})$  (シンプレクティック群の二重被覆群) の極小表現である Weil 表現に対するテータ対応 (無重複で分解する分岐則の一種とも解釈できる) に関しては, 過去 30 年以上にわたり多くの研究がなされてきた. これに比べ, 極小表現  $\pi$  に対する分岐則問題が文献に登場したのはごく最近である (Kobayashi–Ørsted(2003), Dvorsky(2007)).

主論文では小林俊行氏によって提示された次の問題を考える:

問題 1. 極小表現  $\pi$  を制限すると無重複になる部分群で, 極小のものを見つけよ.

Weil 表現の場合, Howe の dual pair の理論より,  $Mp(n, \mathbb{R})$  の部分群で dual pair をなすものに対して制限した表現の既約分解は無重複である (下記の事実 2 (1)).

$G = O(2p, 2q)$  の極小表現  $\pi$  の場合,  $p_1 + p_2 = p$  である  $p_1, p_2 \geq 1$  に対し, コンパクト部分群

$$G' := U(p_1) \times U(p_2) \times U(q). \quad (1)$$

を考える. この対  $(G, G')$  は深さ 3 の対称対の連鎖として得られる. すなわち,

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset G' \quad (2)$$

という部分群の列であって, 各対  $(G, G_1), (G_1, G_2), (G_2, G')$  のいずれもが対称対となるような部分群  $G_1, G_2$  が存在する.

次の定理が主論文の結果である.

定理 A. 制限  $\pi|_{G'}$  の既約分解は無重複である.

さらに, 主論文では制限  $\pi|_{G'}$  の分岐則も得ている.

次の結果は, 定理 A から直ちに得られるという意味では論理的に自明であるが,  $H$  が非コンパクト (したがって  $H$  の既約ユニタリ表現は大多数が無限次元) の場合も扱うことになるため, 今までに知られていなかった例をいくつか含んでいる:

系 B.  $G'$  を含む  $G$  の任意の部分群  $H$  に対し, 制限  $\pi|_H$  の既約分解は無重複である.

さらに, 系 B の  $G \supset H \supset G'$  という設定において, 定理 A により, 制限  $\pi|_H$  に現れる各既約表現を  $G'$  に制限してもまた無重複であることがわかる. これも表現論の結果としては定理 A から論理的に帰結されることであるが, 次のような応用例も得られる:

系 C.  $\sigma$  を一般化双曲面

$$S^{2p-1, 2q} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2p+2q} : |x|^2 - |y|^2 = 1\} \quad (3)$$

の任意の離散系列表現とする.  $\sigma$  は  $O(2p, 2q)$  の既約ユニタリ表現であるが, これを部分群  $U(p) \times U(q)$  に制限したときの既約分解は無重複である.

一般化双曲面の離散系列表現は可算無限個存在し, その分類は Gelfand, 新谷卓郎, Molchanov, 高橋礼司, Strichartz, Faraut, Rossmann 等によって与えられた.

一般に半単純対称空間  $G/H$  の離散系列表現を極大コンパクト部分群に制限したとき, その分岐則は無重複になるとは限らない. しかし,  $S^{2p-1, 2q}$  の離散系列表現を極大コンパクト群  $O(2p) \times O(2q)$  に制限したときに無重複であることは既に知られている (Faraut, Rossmann, Schlichtkrull など).  $U(p) \times U(q)$  は  $O(2p) \times O(2q)$  よりずっと小さな群なので, 系 C は  $O(2p) \times O(2q)$  に対する既知の無重複定理を精密化したものといえる.

## §2. 既知の結果との比較・検討

定理 A と系 B, C を, 無重複に関する以下の定理と比較する.

事実 2. (1) (Howe)  $G = Mp(n, \mathbb{R})$  とし,  $\pi$  を  $G$  の Weil 表現とする.  $(G', G'')$  を  $G$  における dual pair (例.  $n = l(p+q)$  としたとき,  $(G', G'') = (U(p, q), U(l))$  など) とするとき, 制限  $\pi|_{G'G''}$  の既約分解は無重複である.

(2) (Kobayashi, 1997, 2007)  $G$  をエルミート型の非コンパクト単純リー群とし,  $\pi$  をスカラ型既約ユニタリ最高ウェイト表現とする. このとき, 対  $(G, G')$  が半単純対称対となる任意の部分群  $G'$  に対し, 制限  $\pi|_{G'}$  の既約分解は無重複である.

(3) (Vogan, 1980)  $G$  を実線形簡約リー群とし,  $\pi$  を  $G$  の極小表現とする. このとき,  $G$  の極大コンパクト群  $K$  に対し, 制限  $\pi|_K$  の既約分解は無重複である.

(4) (Kobayashi–Ørsted, 2003)  $G$  を不定値直交群  $O(p, q)$  ( $p+q$ : 偶数) とし,  $\pi$  をその極小表現とする. このとき,  $\pi$  を対称部分群  $O(p_1) \times O(p_2, q)$  ( $p_1 \geq 1, p_1 + p_2 = p$ ) に制限したものは, 無重複で既約分解する.

次に、 $G$  のコンパクト部分群のいくつかに対し、以下の記法を用いる。

$$K := O(2p) \times O(2q), \quad K_1 := O(2p_1) \times O(2p_2) \times O(2q), \quad K_2 := U(p) \times U(q).$$

特に、 $K$  は  $G$  の極大コンパクト部分群である。また、定理 A の  $G'$  については  $G' = K_1 \cap K_2$  が成り立つ。

$H$  として  $K, U(p, q), O(2p_1) \times O(2p_2, 2q)$  (同様に  $O(2p_1, 2q) \times O(2p_2)$ ) を系 B に適用して得られる無重複の結果は、それぞれ Vogan(事実 2 (3)), Howe–Tan(1993), Kobayashi–Ørsted(事実 2 (4)) によって、既に知られていた結果と重なっている。

一方、 $H$  が  $G'$  (すなわち定理 A),  $K_1, K_2, U(p_1) \times U(p_2, q), U(p_1, q) \times U(p_2)$  のいずれかであるときも、系 B によって得られる無重複に関する結果はいずれも (少なくとも既存の文献では) 知られていなかったものである。特に定理 A は、Vogan の無重複定理 (事実 2 (3)) を  $O(2p, 2q)$  に適用したものと比べてかなり強い結果である。また、事実 2 の (1) と (2) では最高ウェイト表現のみが扱われているが、ここで現れた表現  $\pi$  (定理 A ( $q > 1$ )) と  $\sigma$  (系 C) は最高ウェイト表現ではない、より一般の表現であり、それに対しても無重複定理が得られたことに注意しておく。

### §3. 主定理の仮定が best possible であること

通常、制限する群が小さくなる程、分岐則における既約表現の重複度は大きくなる。さらに、 $G'$  より小さな群として次の  $G'$  の 2 種類の部分群  $G'', G'''$  を考える：

$$G'' = U(p_1) \times U(p_2) \times U(p_3) \times U(q) \quad (p_1 + p_2 + p_3 = p), \quad (4)$$

$$G''' = U(p_1) \times U(p_2) \times U(q_1) \times U(q_2) \quad (p_1 + p_2 = p, q_1 + q_2 = q). \quad (5)$$

ここで、 $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 \geq 1$  とする。対  $(G, G''), (G, G''')$  は共に深さ 4 の対称対の連鎖として得られる。すなわち、

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset G'' \quad (6)$$

という部分群の列であって、 $(G, G_1), (G_1, G_2), (G_2, G_3), (G_3, G'')$  のいずれもが対称対となるような部分群  $G_1, G_2, G_3$  が存在する。 $G''$  のかわりに  $G'''$  でも同様である。このとき、次の結果を得た：

命題 D. 制限  $\pi|_{G''}$  は無重複ではない。しかし  $\pi|_{G''}$  において、 $G''$  の各既約ユニタリ表現に対する重複度は有限である。

命題 E. 制限  $\pi|_{G'''}$  において  $G'''$  の既約ユニタリ表現の重複度は (0 でなければ) 無限である。

$G'', G'''$  はいずれも  $G'$  の極大な部分群である。したがって、命題 D と E から、 $\pi$  を制限すると無重複で既約分解するような  $U(p_1) \times \cdots \times U(p_j) \times U(q_1) \times \cdots \times U(q_k)$  型の部分群の中で、 $G'$  は極小であることがわかる。これにより、問題 1 に対して 1 つの解答が得られた。

### §4. 証明の方針

定理 A と命題 D, E は、球面調和関数のなす空間に実現されたユニタリ群  $U(n)$  の既約表現を  $U(n_1) \times U(n_2)$  ( $n_1, n_2 \geq 1, n_1 + n_2 = n$ ) に制限した分岐則を用いて、極小表現  $\pi$  の分岐則

を導くことで証明した. 命題 D は, Kobayashi's admissibility theorem(Ann. Math. 1998) から抽象的に証明することもできるが, 主論文では具体的に重複度を計算する公式を与え, それを用いて証明した.

また, 以下に挙げる参考論文では, 超曲面上の積分変換が同型を与えるための必要十分条件を求めた. 特に, この結果を複素光錐に適用した例は, 回転群に対する無重複分解に関わる.

Atsutaka Kowata and Masayasu Moriwaki, Fourier-Borel transformation on the hypersurface of any reduced polynomial, Journal of the Mathematical Society of Japan, 60(1) (2008) 65-73.