論文の内容の要旨

修士論文要旨:

Deformation of the heat kernel and Brownian motion from the perspective of the Ben Saïd-Kobayashi-Ørsted (k,a)-generalized Laguerre semigroup theory

(邦題: Ben Saïd-Kobayashi-Ørsted による (k,a) 一般化ラゲール半群論に基づく熱核とブラウン運動の変形)

氏名 青山 天馬

背景 —(k,a) 一般化 Fourier 解析—

S.Ben Saïd-T.Kobayashi-B.Ørsted は「極小表現の大域解析」[Kob11] を背景に, 「(k,a) 一般化 Fourier 解析」とよばれる新たな古典調和解析の枠組みを創出している [BSKØ09, BSKØ12]. 本研究はこれら研究の流れの中に位置付けられるものである.

(k,a) 一般化 Fourier 解析の理論的支柱である「(k,a) 一般化 Fourier 変換」は大まかには以下の手順で構成される: 「2 種の連続パラメータ (k,a) を持つ微分作用素の族

$$\frac{i}{a}|x|^a, \qquad \frac{i}{a}|x|^{2-a}\Delta_k, \qquad \frac{2}{a}\sum_{i=1}^{N} x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{N+\langle k\rangle+a-2}{a},$$

が $\mathfrak{sl}_2$triple をなす事実に注目する. これをもとに, Lie 理論・表現論を駆使した解析を行えば, (k,a) 一般化 Laguerre 半群と呼ばれる複素解析的半群

$$\left\{e^{z\left(|x|^{2-a}\Delta_k-|x|^a\right)}\right\}_{\mathrm{Re}\, z\geqq 0}$$

が定義でき, $z=\frac{\pi i}{2a}$ における特殊値

$$\mathscr{F}_{k,a}:=i^{\frac{N+a-2}{a}}e^{\frac{\pi i}{2a}\left(|x|^{2-a}\Delta_k-|x|^a\right)}$$

を (k,a) 一般化 Fourier 変換と定義する.」

(k,a) 一般化 Fourier 変換 は Fourier 変換と類似した性質を有しており, 特に $(k,a)=(0,2)$ とすると Fourier 変換に一致する. このとき, (k,a) 一般化 Laguerre 半群は R.Howe によって研究された Hermite 半群 [How88] と一致し, C 型の極小表現である Oscillator 表現 (Segal-Shale-Weil 表現, Metaplectic 表現, Harmonic 表現ともよばれる) とも深く関わっている. $(k,a)=(0,1)$ とすると, 以上の構成は Kobayashi-Mano の Laguerre 半群論 [KM07] になり, これは BD 型の極小表現と関わっている. また, k は Dunkl 理論に関わるパラメータであり $\mathscr{F}_{k,2}$ は Dunkl 作用素となっている. Ben Saïd-Kobayashi-Ørsted 理論はこれらの話題を内包するような古典調和解析の変形理論である.

S.Ben Saïd-T.Kobayashi-B.Ørsted は, [BSKØ09, BSKØ12] において, (k,a) 一般化 Laguerre 半群と (k,a) 一般化 Fourier 変換の積分核を計算しており, 例えば (k,a) 一般化 Fourier 変換の積分核は $k=0$ の場合には以下のようになる.

$$B_a(r\omega, s\mu) = \Gamma\left(\frac{N+a-2}{a}\right)\sum_{m=0}^{\infty}(ia)^{-\frac{2m}{a}}(rs)^m \tilde{J}_{\frac{N+a+2m-2}{a}}\left(\frac{2}{a}(rs)^{a/2}\right)P_m(\omega,\mu)\,.$$

ここで, $\tilde{J}$ は (normalized) Bessel 関数で, P_m は Zonal spherical harmonics (Gegenbauer 多項式で書かれる) である.

主結果等

$(k,a)=(0,2)$ のとき $|x|^{2-a}\Delta_k = \Delta$ であり, $e^{t\Delta}$ が熱流作用素であることに倣えば, $e^{t|x|^{2-a}\Delta_k}$ は Ben Saïd-Kobayashi-Ørsted 理論にもとづいた「(k,a) 変形熱流作用素」であると考えるのが自然であると思われる. 本研究の目的は「(k,a) 変形熱理論」の基本性質の解明およびその応用可能性の探求を $k=0$ の場合に行うことである. 具体的内容はおおよそ以下の通りである.

1. **$(0,a)$-generalized Fourier 積分核の漸近挙動の評価**
   $(0,a)$-generalized Fourier 積分核の複素積分表示を発見 (Theorem 3.1) し, それを援用することでの漸近挙動の評価を行った. これから $(0,a)$-generalized Fourier 積分核の無限遠での増大が高々多項式的であることなど (Corollary 3.6) が導かれ, 以降の種々の解析的操作が正当化される.
2. **a-deformed heat kernel の定義**
   (k,a)-generalized Fourier 変換の視点から, すなわち a-generalized Gauss 関数 $e^{-\frac{t}{a}|x|^a}$ の掛け算作用素のフーリエ変換を元に a-deformed heat kernel $h_a(x,y;t)$ の定義をした (Definition-Proposition 4.1).
3. **a-deformed heat kernel の展開公式**
   a-deformed heat kernel を Bessel 関数と Zonal spherical harmonics を用いた無限和で記述する公式 (Theorem 4.4) を導出した. これから a-deformed heat kernel $h_a(x,y;t)$ と $(0,a)$-generalized Fourier 積分核 $B_a(x,y)$ の間に単純な等式が成立することが明らかになる. この事実と $B_a(x,y)$ の漸近挙動の評価をあわせ, $h_a(x,y;t)$ の漸近挙動の評価を行った. また, 同公式から $h_a(x,y;t)$ が実数値関数であることや, x,y に関する対称性を有していることもわかった (Corollary 4.7).
4. **a-deformed heat flow operator の定式化**
   a-deformed heat kernel $h_a(x,y;t)$ を元に定義される積分作用素の族が a-deformed heat equation を満たすこと, 初期値条件を満たすことなどを示した (Theorem 4.10).
5. **a-deformed heat equation の最大値の原理**
   a-deformed heat equation の最大値の原理の有用な定式化の探求およびその証明を行った (Theorem 4.13). 系として a-deformed heat equation の解が一意存在し, その解が a-deformed heat flow operator で記述されるものになること (Corollaries 4.14, 4.18) や, a-deformed heat flow operator の増大度保存則 (Corollaries 4.16, 4.17), a-deformed heat kernel の正値性, 合成法則, 全積分 (Corollary 4.15) を得た.
6. **a-deformed Brown 運動の構成**
   Brown 運動の定義にあらわれる Gauss 分布を a-deformed heat kernel に置き換えてできる, a-deformed Brown 運動が存在することを証明した (Theorem 5.5). また a-deformed Brown 運動が Markov 過程になること (Theorems 5.9, 5.10) および, Feynman-Kac 型公式 (Theorems 5.13, 5.14, 5.15) を示した.

参考文献

[BSKØ09] Salem Ben Saïd, Toshiyuki Kobayashi, and Bent Ørsted. Generalized Fourier transforms $\mathscr{F}_{k,a}$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(19-20):1119–1124, 2009.

[BSKØ12] Salem Ben Saïd, Toshiyuki Kobayashi, and Bent Ørsted. Laguerre semigroup and Dunkl operators. *Compos. Math.*, 148(4):1265–1336, 2012.

[How88] Roger Howe. The oscillator semigroup. In *The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987)*, volume 48 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 61–132. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[KM07] Toshiyuki Kobayashi and Gen Mano. The inversion formula and holomorphic extension of the minimal representation of the conformal group. In *Harmonic analysis, group representations, automorphic forms and invariant theory*, volume 12 of *Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.*, pages 151–208. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.

[Kob11] Toshiyuki Kobayashi. Algebraic analysis of minimal representations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 47(2):585–611, 2011.