偶数次元の超曲面の判別式と行列式. Serreとの共同研究

1. 定理
2. 証明の~~流~~流れ
3. 定義
4. 証明

1. X 体k上の偶数次元(n)のsmooth scheme

$\ell \neq \mathrm{char}\, k$.

V_ℓ $H^n(X_{\bar k}, \mathbb{Q}_\ell(\frac{n}{2}))$ $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\bar k/k)$の ℓ進直交表現

$\det V_\ell : \Gamma_k \to \{\pm 1\}$ ℓによらない (Saitoの予想)

n oddなら自明 $Sp \subset SL$

計算法

1. De Rham cohomology $\mathrm{char}\, k \neq 2$

$D = H^n_{dR}(X/k) = H^n(X, \Omega^\bullet_{X/k})$.

$\mathrm{Tr} \circ \cup : D \times D \to k$ 非退化対称形式

$\mathrm{disc}\, D$ = 表現行列のdet $\in k^\times/k^{\times 2} = H^1(\Gamma_k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$\det V_\ell = \mathrm{disc}\, D + \begin{cases} r\{-1\} & n \equiv 0\ (4) \\ (r + b_{dR,n})\{-1\} & 2 \end{cases}$$

$r = \sum_{q<n} (-1)^q b_{dR,q}$

2. X $\mathbb{P}^{n+1}$内のd次超曲面. f: ~~定義方程式~~ 定義 k係数d次$n+1$変数多項式

判別式 $\mathrm{disc}(f) \in k^\times \dashrightarrow k^\times/k^{\times}$ 普遍定数 $\pm 1 \cdot \mathrm{disc}\, D$

dとnだけできまる

定理 $\varepsilon(n,d) = (-1)^{\frac{d-1}{2}}$ d奇数 $(-1)^{\frac{n+2}{2}\cdot\frac{d}{2}}$ d偶数.

$\mathrm{char}\, k \neq 2$ $\det V_\ell$は $\varepsilon(n,d)\cdot\mathrm{disc}(f)$ の平方根で定まる

$\mathrm{char}\, k = 2$ $\varepsilon(n,d)\cdot\mathrm{disc}(f) = a^2 + 4b$ とおくと

$\det V_\ell$ は $t^2 + t = b/a^2$ で定まる.

1つの節りで併せばよい

2 証明

前半(楽) 普遍超曲面族を使って $\Sigma(n,d)$の存在を示す

後半 $\Sigma(n,d)$の決定 少なくとも3通り

1. コホモロジー的 (ℓ進 deRham バージョンも)

 Fermat 超曲面のコホモロジー …

 $\det : G_{\mathbb{Q}} \to \{\pm 1\}$ Galois作用で分解 (Weil)

2. 位相的

 同じ超曲面 $\det : G_{\mathbb{R}} \to \{\pm 1\}$ ← $\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times 2} = \{\pm 1\}$

3. mod 4

 d奇なら Fermat. d偶なら もう一つの $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times = \{\pm 1\}$

3. 判別式

n, d 超曲面の普遍族

$$E = \mathbb{Z}^{n+2} \quad \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{P}(E) = \operatorname{Proj} S^\bullet E \ (= \mathbb{Z}[T_0, \dots, T_{n+1}])$$

$$P = P_d = \mathbb{P}((S^d E)^\vee) \qquad S^d E = \bigoplus_{|I|=d} \mathbb{Z} \cdot T^I$$

$$I = (i_0, \dots, i_{n+1}) \quad |I| = i_0 + \dots + i_n \quad T^I = T_0^{i_0} \cdots T_n^{i_n}$$

$$P_d = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[C_I : |I| = d]. \quad (C_I)_{|I|=d} \text{ 双対基底}.$$

$X \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Z}} \times P_d$ 普遍超曲面. 次数 d

普遍多項式 $\sum_{|I|=d} C_I T^I$ で定義される

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & \to & X \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Z}} \times P & \to & \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Z}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ D & \hookrightarrow & P & & \end{array}$$

$\Delta = (D_0 F, \dots, D_{n+1} F)$ ← 偏微分.

射影空間束 全次元 $n+2$

$(dF = T_0 \cdot D_0 F + \dots + T_{n+1} \cdot D_{n+1} F)$

D 被約閉部分スキーム　既約因子　Mに次数 $(n+2)(d-1)^{n+1}$

判別式

$\mathrm{disc}(F)$　　$\Gamma(P, \mathcal{O}(M)(-D)) \simeq \mathbb{Z}$ の基底

$$= \frac{1}{d^{a(n,d)}} \mathrm{res}(D_0F, \ldots, D_{n+1}F) \qquad a(n,d) = \frac{(d-1)^{n+2} - (-1)^{n+2}}{d}$$

$\mathrm{disc}(f) = 0 \iff [f] \in D \iff \Delta \cap X_f \neq \phi \iff X_f$ singular.

$U = P \setminus D$　非特異 d次超曲面のモジュライ

n 偶数 $\Rightarrow$ M 偶数　$\mathrm{disc}(F)$ の平方根　U上の μ_2-torsor

$$[\mathrm{disc}\, F] \in H^1(U, \mu_2).$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$(\mathrm{disc}\, f) \in k^\times / k^{\times 2} \qquad \mathrm{char}\, k \neq 2$$

行列式　$\pi : X_U \to U = P \setminus D.$　$R^n \pi_* \mathbb{Q}_\ell(\frac{n}{2}).$

smooth $\mathbb{Q}_\ell$-層 on $U_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}]}$.

$\det \in H^1(U_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}]}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$\updownarrow$　Weil予想　ℓによらない.

$[\det H^n(X_U/U)] \in H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$\det H^n(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(\frac{n}{2})) \in \mathrm{Hom}(G_k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

定理　$\varepsilon(n,d)$ をはじめのとおりとすると

$[\varepsilon(n,d) \cdot \mathrm{disc}\, F]$ は $H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \subset H^1(U, \mu_2)$ の元で

$$[\varepsilon(n,d) \cdot \mathrm{disc}\, F] = [\det H^n(X_U/U)].$$ ⌟

4 証明 $0 \to \Gamma(U_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}, \mathcal{O})^\times / (\ )^2 \to H^1(U_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}, \mu_2) \to \mathrm{Pic}(U_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]})[2]$
位数4　　　　　　　　位数2 $\to 0$

$\Gamma(U_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}, \mathcal{O})^\times = \Gamma(P_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}, \mathcal{O})^\times = \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]^\times = \langle 2, \pm 1\rangle$

$0 \to \mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(P_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}) \to \mathrm{Pic}(U_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}) \to 0$

$\mathrm{Pic}(P_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}) \simeq \mathbb{Z}$, $\mathrm{Pic}(U_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $1 \longmapsto n$

$\xi \to D$ gen. geom pt　I_ξ 惰性群

$H^1(U_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}, \mu_2) \to \mathrm{Hom}(I_\xi, \mu_2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$[\mathrm{disc}\, F], [\det H^n] \longmapsto$ non-trivial

$\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]^\times$　合成は0　　Picard-Lefschetz公式

$\Rightarrow$ $\mathrm{Pic}(U_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]})[2] \simeq \mathrm{Hom}(I_\xi, \mu_2)$

non-trivial

$\Rightarrow$　$[\det H^n] = [I\, \mathrm{disc}\, F]$ or $\cancel{[I2\, \mathrm{disc}\, F]}$

2で不分岐　　　　2で分岐　前半終

後半 の複素共役 $\det(\sigma : H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(\tfrac{n}{2})))$

を X が Fermat 超曲面 X_d $T_0^d + \dots + T_{n+1}^d$ のときに計算すれば十分

$R(\mathrm{Gal}_{\mathbb{R}}) \to \mathbb{Z}^2$　$(\rho) \mapsto (\mathrm{Tr}(\rho(1)), \mathrm{Tr}(\rho(\sigma))) = (a, b)$

$\det \rho(\sigma) = (-1)^{\frac{a-b}{2}}$

$X/\mathbb{R}$ proj smooth　$[H^*(X(\mathbb{C}))] \mapsto (e_{\mathbb{C}}, e_{\mathbb{R}})$

$e_{\mathbb{C}} = X(\mathbb{C})$, $e_{\mathbb{R}} = X(\mathbb{R})$ のEuler数

$H^*_c(X(\mathbb{C}) - X(\mathbb{R})) \to H^*(X(\mathbb{C})) \to H^*(X(\mathbb{R})) \to$

0　　$\mathrm{Tr}(\sigma)$　　$e_{\mathbb{R}}$

$X = X_d$　d 奇数　$X_d \to X_1$ 奇は homeo $X_d(\mathbb{R}) \to X_1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$　$e_{\mathbb{R}} = 1$

偶数　$X_d(\mathbb{R}) = \emptyset$　$e_{\mathbb{R}} = 0$

$e_{\mathbb{C}}$　$T \cdot P(T) = (T-1)^{n+2} + (-1)^{n+2}((n+2)T - 1)$　$e_{\mathbb{C}} = P(d)$

$P(d) \equiv P(a) + (d-a)P'(a) \mod 4$　if $d \equiv a \mod 2$