

ℓ 進層の Euler 数 (加藤和也氏との共同研究)

東京大学・数理科学研究科 齋藤 毅 (Takeshi Saito)
Department of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

F を標数 $p > 0$ の代数閉体, U を F 上スムーズな次元 d の分離有限型スキームとする. ℓ を p と異なる素数とし, \mathcal{F} を U 上のスムーズ ℓ 進層とする. \mathcal{F} の Euler 数 $\chi_c(U, \mathcal{F})$ は,

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{2d} (-1)^q \dim H_c^q(U, \mathcal{F})$$

で定義される. \mathcal{F} が定数層 \mathbb{Q}_ℓ のときは, $\chi_c(U, \mathbb{Q}_\ell)$ を $\chi_c(U)$ で表す.

$d = 1$ のときは, Euler 数 $\chi_c(U, \mathcal{F})$ は, Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) - \text{rank } \mathcal{F} \cdot \chi_c(U) = \text{deg Sw}(\mathcal{F})$$

で求められる ([1] Exposé X). ここでは, 一般次元の U に対し, Swan 類 $\text{Sw}(\mathcal{F})$ を無限遠に台をもつ 0 サイクル類として定義し, Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式の高次元化を与える. 詳細はプレプリント [2] があるので, ここでは概要だけを述べる.

1 Swan 類と Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式の高次元化

まず, ℓ 進層の Swan 類を定義する. U と \mathcal{F} を上のとおりとし, $U \rightarrow X$ を F 上の固有スキームへの開うめこみとする. ここでは, 話を簡単にするため, 次の仮定をおく.

1. \mathcal{F} は, U の有限エタール Galois 被覆 $f: V \rightarrow U$ 上で, 定数層となる.
2. カルテシアン図式

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & Y \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

で, Y は F 上固有スムーズかつ, V は Y の単純正規交叉因子 D の補開部分スキームとなるものがある.

一般にはこれらの条件はみたされないが，次のように修正することで，一般の場合も定義される．1では， \mathcal{F} の法 ℓ 還元を自明化する被覆をとる．そして，下に与える Swan 類 $\text{Sw}(\mathcal{F})$ の定義では，跡の代わりに Brauer 跡を用いる．2では，特異点解消の代わりに オルタレイションを用いる．

D_1, D_2, \dots, D_m を D の既約成分とする． $(Y \times Y)' \rightarrow Y \times Y$ を，閉部分スキームの族 $D_1 \times D_1, D_2 \times D_2, \dots, D_m \times D_m$ でのブローアップとする．すなわち，これらを定めるイデアル層の積によるブローアップとする． $(Y \times Y)'$ は $2d$ 次元の固有スムーズスキームである．対角射 $Y = \Delta_Y \rightarrow Y \times Y$ は， \log 対角射 $Y = \Delta_Y^{\log} \rightarrow (Y \times Y)'$ をひきおこす．

$\sigma \in G$ に対し， $\sigma : V \rightarrow V$ のグラフを $\Gamma_\sigma \subset V \times V$ で表し，その $(Y \times Y)'$ での閉包を $\bar{\Gamma}_\sigma$ とする． $s_{V/U}(\sigma) \in CH_0(Y \setminus V)$ を，

$$s_{V/U}(\sigma) = \begin{cases} -(\bar{\Gamma}_\sigma, \Delta_Y^{\log})_{(Y \times Y)'} & \sigma \neq 1 \text{ のとき} \\ -\sum_{\tau \neq 1} s_{V/U}(\tau) & \sigma = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める． $V \rightarrow U$ はエタールだから， $\sigma \neq 1$ のとき， Γ_σ と対角 Δ_V の共通部分は空である．これより，交点積 $(\bar{\Gamma}_\sigma, \Delta_Y^{\log})_{(Y \times Y)'}$ は， $CH_0(Y \setminus V)$ の元を定める． CH_0 は 0 サイクルの有理同値類のなす Chow 群を表す．

M を \mathcal{F} に対応する G の表現とすると，Swan 類 $\text{Sw}(\mathcal{F}) \in CH_0(X \setminus U)_{\mathbb{Q}}$ は，

$$\text{Sw}(\mathcal{F}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \bar{f}_* s_{V/U}(\sigma) \text{Tr}(\sigma : M)$$

で定義される．添字 \mathbb{Q} は $\otimes \mathbb{Q}$ を表す．正確にいうと，上の定義では， $\text{Sw}(\mathcal{F})$ は $CH_0(X \setminus U)_{\mathbb{Q}}$ の元として定義されることになるが，簡単な修正により， $CH_0(X \setminus U)_{\mathbb{Q}}$ の元として定義される．この修正は実は不要であり，同じ元を定めるものと予想される．

$Y \rightarrow X$ が代数曲線の有限射であるときは，上の構成は，通常の Swan 導手の定義 ([1] Exposé X) の，幾何的な言換えである．

この Swan 類を使って，Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式の高次元化が定式化される．

定理 1 U を F 上のスムーズ・スキーム， $X \supset U$ をコンパクト化とする． U 上のスムーズ ℓ 進層 \mathcal{F} に対し，

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) - \text{rank } \mathcal{F} \cdot \chi_c(U) = \text{deg Sw}(\mathcal{F})$$

がなりたつ．

定理 1 の証明は，標準的な論法により，跡公式

$$\text{Tr}(\sigma : H_c^*(V, \mathbb{Q}_\ell)) = \text{deg } (\bar{\Gamma}_\sigma, \Delta_Y^{\log})_{(Y \times Y)'}$$

($\sigma \neq 1$) に帰着される．左辺は，交代和 $\sum_{q=0}^{2d} (-1)^q \text{Tr}(\sigma : H_c^q(V, \mathbb{Q}_\ell))$ を表す．跡公式の証明は，節を改めて解説する．

2 開多様体に対する Lefschetz 跡公式

記号を変えて、この節では、 X を F 上の固有スムーズ・スキームとし、 U を X の単純正規交叉因子 D の補開部分スキームとする。 $\Gamma \subset U \times U$ を閉部分スキームとし、 $p_1, p_2 : \Gamma \rightarrow U$ で各成分への射影との合成を表す。

代数的対応 Γ のコホモロジーへの作用 $\Gamma^* = p_{1*} \circ p_2^* : H_c^q(U, \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H_c^q(U, \mathbb{Q}_\ell)$ は、無条件には定義されないが、 $p_2 : \Gamma \rightarrow U$ が固有なら定義される。 $\bar{\Gamma} \subset X \times X$ を Γ の閉包とすると、 $p_2 : \Gamma \rightarrow U$ が固有という条件は、

$$(!) \quad \bar{\Gamma} \cap (D \times X) \subset \bar{\Gamma} \cap (X \times D)$$

と同値である。交代和 $\text{Tr}(\Gamma^* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = \sum_{q=0}^{2d} (-1)^q \text{Tr}(\Gamma^* : H_c^q(U, \mathbb{Q}_\ell))$ に対するよい跡公式を得るため、条件 (!) よりも強い条件を設定する。

前節と同様に、 $(X \times X)' \rightarrow X \times X$ を、 $D_1 \times D_1, D_2 \times D_2, \dots, D_m \times D_m$ でのブローアップとする。 $(D \times X)', (X \times D)' \subset (X \times X)'$ を、それぞれ $D \times X, X \times D$ の固有変換とする。このとき、次の跡公式が得られる。

定理 2 $\Gamma \subset U \times U$ を閉部分スキームとし、 $\bar{\Gamma}' \subset (X \times X)'$ をその閉包とする。条件

$$(!') \quad \bar{\Gamma}' \cap (D \times X)' \subset \bar{\Gamma}' \cap (X \times D)'$$

を仮定する。このとき、条件 (!) $\bar{\Gamma} \cap (D \times X) \subset \bar{\Gamma} \cap (X \times D)$ がなりたち、等式

$$\text{Tr}(\Gamma^* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = \text{deg}(\bar{\Gamma}', \Delta_{X \times X}^{\log})_{(X \times X)'}$$

がなりたつ。

定理 2 から定理 1 を導くには、 $\Gamma = \Gamma_\sigma$ が、定理 2 の条件 (!') を満たすことを確かめればよい。

以下、定理 2 の証明の方針を述べる。まず、 $X = U$ の場合の通常跡公式の証明を、簡単に復習する。 $[\Gamma] \in H^{2d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(d))$ を Γ のサイクル類とし、 $[\Delta] \in H^{2d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(d))$ を Δ のサイクル類とする。 $\cup : H^{2d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(d)) \times H^{2d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(d)) \rightarrow H^{4d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(2d))$ をカップ積とし、 $\text{Tr} : H^{4d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(2d)) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$ を跡写像とする。 Lefschetz 跡公式 ([1] Exposé III) より、

$$\text{Tr}(\Gamma^* : H^*(X, \mathbb{Q}_\ell)) = \text{Tr}([\Gamma] \cup [\Delta])$$

がなりたつ。カップ積と交点積、および跡射と次数射の両立性より、

$$\text{Tr}([\Gamma] \cup [\Delta]) = \text{deg}(\Gamma, \Delta)_{X \times X}$$

である。これより、 $\text{Tr}(\Gamma^* : H^*(X, \mathbb{Q}_\ell)) = \text{deg}(\Gamma, \Delta)_{X \times X}$ がえられる。

一般の場合には、この証明を次のように修正する。 $U \times U \xrightarrow{j_1} X \times U \xrightarrow{j_2} X \times X$ を開埋め込みとする。条件 (!) より、サイクル類 $[\Gamma] \in H^{2d}(X \times X, Rj_{2*}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d))$ が定義される。同様に、 $[\Delta] \in H^{2d}(X \times X, j_{2!}Rj_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d))$ が定義される。 $\cup : H^{2d}(X \times X, Rj_{2*}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d)) \times H^{2d}(X \times X, j_{2!}Rj_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d)) \rightarrow H^{4d}(X \times X, j_{2!}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(2d))$ をカップ積

とし, $\text{Tr} : H^{4d}(X \times X, j_{2!}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(2d)) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$ を跡写像とすると, Lefschetz 跡公式 ([1] Exposé III) より,

$$\text{Tr}(\Gamma^* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = \text{Tr}([\Gamma] \cup [\Delta])$$

がなりたつ.

$\text{Tr}([\Gamma] \cup [\Delta]) = \text{deg}(\bar{\Gamma}', \Delta^{\text{log}})_{(X \times X)'}$ を示す. $(X \times X)^\sim = (X \times X)' \setminus ((D \times X)' \cup (X \times D)')$ とおき, $\tilde{\Gamma} = \bar{\Gamma}' \cap (X \times X)^\sim$ とおく. $(X \times X)^\sim \xrightarrow{j'_1} (X \times X)' \setminus (X \times D)' \xrightarrow{j'_2} (X \times X)'$ を開うめこみとする. 仮定 (!) より, サイクル類 $[\tilde{\Gamma}] \in H^{2d}((X \times X)', Rj'_{2*}j'_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d))$ が定義される. 同様に, $[\Delta^{\text{log}}] \in H^{2d}((X \times X)', j'_{2!}Rj'_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d))$ も定義される. 標準写像 $H^{2d}(X \times X, Rj_{2*}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d)) \rightarrow H^{2d}((X \times X)', Rj'_{2*}j'_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d))$, $H^{2d}(X \times X, j_{2!}Rj_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d)) \rightarrow H^{2d}((X \times X)', j'_{2!}Rj'_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d))$ は同型であり, サイクル類 $[\Gamma], [\Delta]$ を, それぞれ $[\tilde{\Gamma}], [\Delta^{\text{log}}]$ にうつす. 図式

$$\begin{array}{ccc} H^{2d}(X \times X, Rj_{2*}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d)) & \longrightarrow & H^{4d}(X \times X, j_{2!}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(2d)) \\ \times H^{2d}(X \times X, j_{2!}Rj_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d)) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{2d}((X \times X)', Rj'_{2*}j'_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d)) & \longrightarrow & H^{4d}((X \times X)', j'_{2!}j'_{1!}\mathbb{Q}_\ell(2d)) \\ \times H^{2d}((X \times X)', j'_{2!}Rj'_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d)) & & \end{array}$$

は可換であり,

$$\text{Tr}([\Gamma] \cup [\Delta]) = \text{Tr}([\tilde{\Gamma}] \cup [\Delta^{\text{log}}])$$

が得られる. さらに, カップ積と交点積および, 跡写像と次数射の両立性より,

$$\text{Tr}([\tilde{\Gamma}] \cup [\Delta^{\text{log}}]) = \text{deg}(\bar{\Gamma}', \Delta^{\text{log}})_{(X \times X)'}$$

である. よって, $\text{Tr}(\Gamma^* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = \text{deg}(\bar{\Gamma}', \Delta^{\text{log}})_{(X \times X)'}$ が示された.

おわりに, 跡公式の例を 2 つあげる. どちらの例でも, $U = \mathbb{A}^1 \subset X = \mathbb{P}^1$ とする. このとき, $H_c^q(U, \mathbb{Q}_\ell)$ は, $q = 2$ のとき 1 次元で, それ以外のときは 0 である.

例 1 . $F : U \rightarrow U$ を Frobenius 自己準同型とする. F^* の $H_c^2(U, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用は p 倍であり, $\text{Tr}(F^* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = p$ である. 転置 F_* の $H_c^2(U, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用は 1 倍であり, $\text{Tr}(F_* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = 1$ である. $\text{deg}(\Delta, \Gamma_F)_{(X \times X)^\sim} = p$ である.

F^* は条件 (!) をみたし, $\text{Tr}(F^* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = \text{deg}(\Delta, \Gamma_F)_{(X \times X)^\sim} = p$ がなりたつ. F_* は条件 (!) をみたさず, $\text{Tr}(F_* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = 1 \neq \text{deg}(\Delta, \Gamma_F)_{(X \times X)^\sim} = p$ である.

例 2 . $f : U \rightarrow U$ を自己同型 $x \mapsto x + 1$ とする. このとき, f^* の $H_c^2(U, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用は 1 倍であり, $\text{Tr}(f^* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = 1$ である. このときも条件 (!) がなりたち, $\text{Tr}(f^* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = \text{deg}(\Delta, \Gamma_f)_{(X \times X)^\sim} = 1$ である.

References

- [1] A. Grothendieck et. al., *Cohomologie ℓ -adique et Fonction L*, SGA 5, Springer LNM 589 (1977).
- [2] K. Kato, T. Saito, *Ramification theory of schemes over a perfect field*, preprint. math.AG/0402010